

Нули многозначных функционалов в коническом метрическом пространстве с w -расстоянием

Научный руководитель – Фоменко Татьяна Николаевна

Погорелова Мария Михайловна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, Москва,
Россия

E-mail: maria.ppp@mail.ru

Доклад основан на совместной работе с Фоменко Т.Н. [2, 3]

Пусть E — вещественное банахово пространство, $P \subset E$ — замкнутый, выпуклый, острый (т.е. $P \cap (-P) = \{\theta\}$) и телесный (т.е. $\text{int } P \neq \emptyset$) конус. Обозначим через \preceq частичный порядок, порождённый конусом P : $x \preceq y \iff y - x \in P$, $x \ll y \iff y - x \in \text{int } P$.

Пусть (X, d) — полное коническое метрическое пространство с конической метрикой $d: X \times X \rightarrow P$, и $p: X \times X \rightarrow P$ — коническое w -расстояние, то есть функция, удовлетворяющая условиям ([1]):

(w1) $p(x, z) \preceq p(x, y) + p(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$,

(w2) для любого $x \in X$, отображение $p(x, \cdot): X \rightarrow P$ полунепрерывно снизу,

(w3) для любого $\varepsilon \in E$, $\theta \ll \varepsilon$, существует $\delta \in E$, $\theta \ll \delta$, такое что из $p(z, x) \ll \delta$ и $p(z, y) \ll \delta$ следует $d(x, y) \ll \varepsilon$.

Определение 1 Полунепрерывность снизу. Коническая функция $G: X \rightarrow P$ называется полунепрерывной снизу в точке $x \in X$, если для любого элемента $\varepsilon \in E$, удовлетворяющего условию $\theta \ll \varepsilon$, существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что $G(x) \preceq G(x_n) + \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, для \forall последовательности $\{x_n\} \subseteq X$, $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 2. Многозначная функция $\varphi: X \rightrightarrows P$ называется (A, B) -поисковой относительно w -расстояния p , если $\theta \preceq \varphi(x)$ для любого $x \in X$, то есть $\varphi(x) \in P$, и для любой пары $(x, c) \in \text{Graph}(\varphi) := \{(x, c) \in X \times P | c \in \varphi(x)\}$ существует пара $(x', c') \in \text{Graph}(\varphi)$ такая, что $p(x, x') \preceq A(c)$, $c' \preceq AB(c)$, где $A, B: E \rightarrow E$ — ограниченные биективные линейные операторы, $A(P) = P, B(P) = P, AB = BA, r(AB) < 1$

Определение 3. Пусть φ — (A, B) -поисковая коническая функция. Последовательность $\{(x_n, c_n)\}_{n=0}^\infty \subseteq X \times P$ называется (A, B) -поисковой для функции φ , если $(x_n, c_n) \in \text{Graph}(\varphi)$ и $p(x_n, x_{n+1}) \preceq A(c_n)$, $c_{n+1} \preceq AB(c_n)$, $\forall n \geq 0$.

Определение 4. График $\text{Graph}(\varphi)$ называется поисково-замкнутым, если всякая (A, B) -поисковая последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \text{Graph}(\varphi)$, для которой $x_n \rightarrow z$ и $c_n \rightarrow \theta$, имеет предел $(z, \theta) \in \text{Graph}(\varphi)$.

Определение 5. График (A, B) -поисковой конической функции φ называется *поисково-полным*, если любая фундаментальная поисковая последовательность $\{(x_n, c_n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \text{Graph}(\varphi)$ сходится к элементу вида $(z, \theta) \in \text{Graph}(\varphi)$.

График $\text{Graph}(\varphi)$ называется $\{\theta\}$ -замкнутым, если все пределы последовательностей графика вида (z, θ) содержатся в нём.

Теорема 1. Пусть (X, d) — полное коническое E -значное метрическое пространство с w -расстоянием p , и $\varphi: X \rightrightarrows P$ — многозначная коническая (A, B) -поисковая функция относительно w -расстояния p . Предположим, что график $\text{Graph}(\varphi)$ является $\{\theta\}$ -замкнутым.

Тогда для любой начальной пары $(x_0, c_0) \in \text{Graph}(\varphi)$ существует поисковая последовательность $\{(x_n, c_n)\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \text{Graph}(\varphi)$, начинающаяся с (x_0, c_0) и сходящаяся относительно w -расстояния p к некоторой паре $(z, \theta) \in \text{Graph}(\varphi)$, то есть $\theta \in \varphi(z)$, и $p(z, z) = \theta$.

Источники и литература

- 1) M. Cvetković, V. Rakočević, Fixed point of mappings of Perov type for w -cone distance, Bulletin T.CXLVIII de l'Académie serbe des sciences et des arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématiques, **40** (2015), 59–74.
- 2) Fomenko T.N., Pogorelova M.M. Zeros of a family of multivalued cone functions on a TVS-valued cone metric space, Russian Mathematical Surveys, Turpion - Moscow Ltd. (United Kingdom), 80, № 4, с. 717-719 DOI
- 3) Fomenko T.N. Zeros of Conic Functions, Fixed Points, and Coincidences Doklady Mathematics, 109, № 3, с. 252-255 DOI