Секция «19.6 Геометрия и топология»

Топология слоений Лиувилля геодезического потока на многогранных поверхностях

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кузнецова Ирина Сергеевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: irina.kuznetcova@math.msu.ru

Исследованием структуры геодезических на многогранниках, гомеоморфных замкнутым двумерным поверхностям, занимались многие ученые. Однако обычно геодезические на многогранниках не рассматриваются с точки зрения интегрируемости, поскольку поведение движущейся точки в вершинах, вообще говоря, не определено. Оказывается, существует класс многогранников, гомеоморфных сфере, которые допускают корректное доопределение траектории точки, попавшей в вершину. Он включает в себя только равногранные тетраэдры и три типа равногранных двугранников с различными треугольниками в гранях.

Теорема 1. *Пусть W — двугранник, допускающий корректное доопределение траекторий, попадающих в его вершины, как биллиардных траекторий. Тогда он принадлежит одному из трех классов многогранных поверхностей:*

1) *двугранники, грани которых являются правильными треугольниками,*
2) *двугранники, грани которых являются прямоугольными равнобедренными треугольниками,*
3) *двугранники, грани которых являются прямоугольными треугольниками с острыми углами, равными $\pi/3$ и $\pi/6$.*

Мы можем замостить развертками таких многогранников всю плоскость и рассматривать траекторию движущейся частицы как прямую в $\mathbb{R}^2$. Траектории, не проходящие через вершины многогранников, будут являться локально-кратчайшими, т.е. геодезическими, а при попадании в вершину их можно считать биллиардными траекториями, поведение которых определяется по плоской развертке.

Угол пересечения прямой траектории с ребрами каждого из многогранников на развертке остается постоянным с точностью до α, где $\alpha \in \{\pi, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3\}$. То есть этот угол, взятый по модулю α, является дополнительным первым интегралом. Его область значений — окружность.

Теорема 2. *Пусть W — равногранный тетраэдр или двугранник с треугольными гранями, допускающий корректное доопределение геодезических линий в его вершинах. Тогда дополненный геодезический (биллиардный) поток на W является вполне интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле [1], причем все слои в слоении Лиувилля регулярны и гомеоморфны 2-тору. Изоэнергетическая поверхность Q^3 системы гомеоморфна трехмерному тору $T^3 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi) \times S^1(\chi)$, факторизованному по действию инволюции, соответствующей рассматриваемому многограннику.*

Все полученные системы лиувиллево неэквивалентны.

Источники и литература

1) Белозеров Г.В., Фоменко А.Т. Траекторные инварианты биллиардов и линейно интегрируемые геодезические потоки // Математический сборник. 2024. Т. 215, № 5. С. 3–46.