

**Алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга плоского эллиптического бильярда с потенциалом полиномиального вида четного порядка**

**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич**

*Туньянц Доминика Арамовна*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

*E-mail: 2001dat@inbox.ru*

Существует ряд обобщений плоского математического бильярда в замкнутой ограниченной области, в котором движется частица без воздействия на нее внешних сил: бильярд с проскальзыванием, бильярдные книжки [1], бильярды с потенциалом. В данном докладе рассматривается плоский бильярд, ограниченный эллипсом из семейства софкусных квадров  $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$ , с потенциалом полиномиального вида четной степени, в

общем виде записываемого как  $Q(x, y) = P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ . Согласно теореме В.В.

Козлова [2], бильярд с потенциалом будет вполне интегрируемой по Лиувиллю системой тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению (1):

$$(a - b)Q_{xy} + 3(yQ_x - xQ_y) + Q_{xy}(y^2 - x^2) + xy(Q_{xx} - Q_{yy}) = 0. \quad (1)$$

В классе полиномов  $P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$  сводится к решению системы линейных уравнений на коэффициенты многочлена  $P_{2l}$ , в результате которого мы получаем следующие выражения для коэффициентов потенциала  $P_{2l}$ .

Лемма: Полином  $P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ , удовлетворяющий (1), имеет следующие коэффициенты:

1.  $a_{i,j} = 0$ , где  $i$  и  $j$  не являются одновременно четными,
2.  $a_{0,2l-2m} = \alpha_{l-m}$ , где  $m = 0, \dots, l-1$  и  $\alpha_l \neq 0$ ,
3.  $a_{2k,2l-2k-2m} = \left( C_{k-1}^0 \alpha_{l-m} - C_k^1 (a-b) \alpha_{l-m+1} + \dots + (-1)^m C_{k+m-1}^m (a-b)^m \alpha_l \right) C_{l-m}^k$ , где  $k = 1, \dots, l-m$  и  $m = 0, \dots, l-1$ .

Для изучения вполне интегрируемой по Лиувиллю динамической системы с гамильтонианом  $H$  и дополнительным первым интегралом  $F$  полезно исследовать топологию слоения Лиувилля трехмерных изоэнергетических поверхностей. Полное описание слоений Лиувилля дает инвариант Фоменко-Цишанга. При малых степенях полиномиального потенциала вычисление инварианта Фоменко-Цишанга можно было провести, перебрав все случаи различных перестроек областей возможного движения (ОВД) частицы при изменении значения интеграла  $F = f$  с зафиксированным значением гамильтониана  $H = h$ . Инвариант Фоменко-Цишанга в таком случае вычислялся с помощью явного рассмотрения перестроек ОВД. Однако в общем случае перебор случаев становится очень трудоемким — количество перестроек, возможных расположений связных компонент ОВД и их количество кратно растет с увеличением степени потенциала. Предложенный в данной работе

алгоритм построения инварианта Фоменко-Цишанга использует лишь свойства многочлена  $P_{2l}$  и не предполагает явного рассмотрения перестроек ОВД. С его помощью стало возможным эффективно рассматривать данную динамическую систему с потенциалом полиномиального вида со сколь угодно большой четной степенью.

В эллиптических координатах уравнения движения такой системы могут быть записаны в следующем виде, где  $a, b$  — параметры граничного эллипса из семейства софокусных квадрик  $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$ :  $\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{V(\lambda_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $V(z) = (a + z)(b + z)(f + hz - P(z))$ ,  $F = f$ ,  $H = h$  — значения интегралов  $F, H$ . Введём обозначение  $W(z) = f + hz - \sum_{i=2}^{l+1} c_i \lambda^i$ .

В ходе данной работы были полностью описаны вид и количество атомов, возникающий при бифуркациях бильярда с потенциалом, описан ход построения графа Роба, а также вычисление меток на его ребрах. Таким образом, полностью вычислен инвариант Фоменко-Цишанга для плоского бильярда в эллипсе с полиномиальным потенциалом произвольной четной степени.

Теорема: Инвариант Фоменко-Цишанга для бильярда в эллипсе с потенциалом вида  $P_{2l}(x, y) = \sum_{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ , удовлетворяющему (1), алгоритмически вычисляется по виду многочлена  $W(z)$  и значению  $h$  интеграла энергии.

### Источники и литература

- 1) Ведюшкина, В.В. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева // Матем. сб. - 2018. т. 209, номер 12, с. 17–56.
- 2) Козлов, В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде / В. В. Козлов // Прикладная математика и механика. - 1995. - т. 59 - вып. 1.
- 3) Dragovic, V. Cayley-Type Conditions for Billiards within  $k$  Quadrics in  $R^d$  / V. Dragovic, M. Radnovic // J. Phys. A. - 2004. - Vol. 37 - N. 4 - pp. 1269-1276.