Секция «19.6 Геометрия и топология»

Топологический анализ обратных магнитных биллиардов в круге

Научный руководитель – Ведюшкина Виктория Викторовна

Белюкина Полина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: polina.belukina@math.msu.ru

Рассмотрим динамическую систему: на материальную точку единичной массы и заряда вне области единичного круга $\mathcal{B}$ действует постоянное магнитное поле индукции β, ортогональное к плоскости стола, а внутри $\mathcal{B}$ не действует. Таким образом, частица движется равномерно по прямолинейным траекториям внутри области $\mathcal{B}$ и по дугам окружностей Лармора L вне области. Такая система называется **обратным магнитным биллиардом в окружности** [3]. Система вполне интегрируема в кусочно-гладком смысле [1] с первыми интегралами L — радиус окружностей Лармора, R — расстояние от центра области $\mathcal{B}$ до центров окружностей Лармора:

$$L = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{\beta}$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \beta^2 - 2\beta(xv_2 - yv_1)} : \ (x, y) \in \mathcal{B} \\ \frac{1}{\beta}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \beta^2(x^2 + y^2) - 2\beta(xv_2 - yv_1)} : \ (x, y) \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

Грубая молекула, соответствующая любому регулярному значению интеграла L, имеет вид A—. Слоение Лиувилля данного магнитного биллиарда для фиксированного уровня энергии ($L = const$) при увеличении значения R следующее: из окружности S^1 рождается семейство однопараметрических торов T^2, которые уходят на бесконечность.

Рассмотрим части траекторий обратного магнитного биллиарда, которые лежат внутри области $\mathcal{B}$. Такая система является биллиардом с переменным проскальзыванием [2], так как при отражении от границы частица не только меняет направление вектора скорости, но и перемещается на некоторое расстояние вдоль границы. Величина дуги φ, на которую поскальзывает частица, зависит от угла α, под которым она ударилась о границу: $\cos\varphi = 1 - \frac{2L^2}{R^2}\sin^2\alpha$.

Изоэнергетическая поверхность обратного магнитного биллиарда некомпактна, так как траектории могут проходить через любую точку плоскости. Чтобы рассматривать компактное изоэнергетическое многообразие, ограничим обратный магнитный биллиард окружностью радиуса 2 и определим на её границе отождествление согласно биллиардному закону. Полученная система также вполне интегрируема в кусочно-гладком смысле с теми же первыми интегралами. Образ её отображения момента имеет вид как на рисунке 2, бифуркационной диаграммой является граница изображенной области. Изоэнергетическая поверхность такого биллиарда гомеоморфна трёхмерной сфере S^3.

Источники и литература

1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск 1999. - 443 с. : ил. - (Регулярная и хаотическая динамика).

2) Fomenko A. T. , Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N. Liouville foliations of topological billiards with slipping // Russ. J. Math. Phys., 28:1 (2021), 37–55.

3) Gasiorek Sean. On the dynamics of inverse magnetic billiards. // School of Mathematics and Statistics, Carslaw Building F07, University of Sydney, NSW 2011 Australia.

Иллюстрации

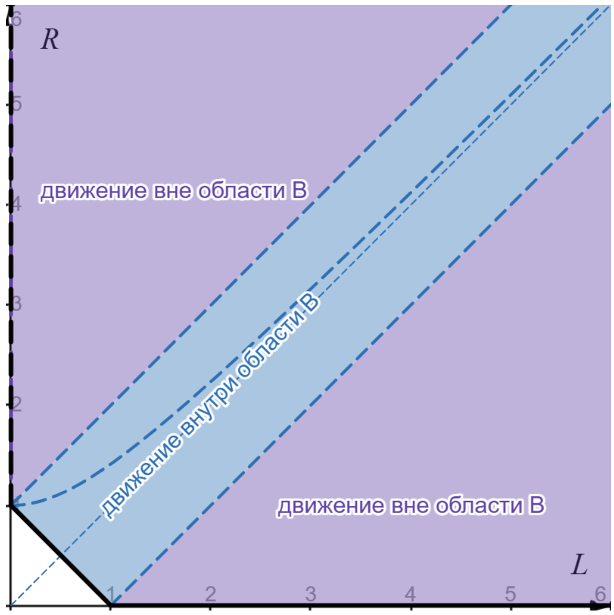

Рис. : Образ отображения момента обратного магнитного биллиарда. Бифуркационная диаграмма.

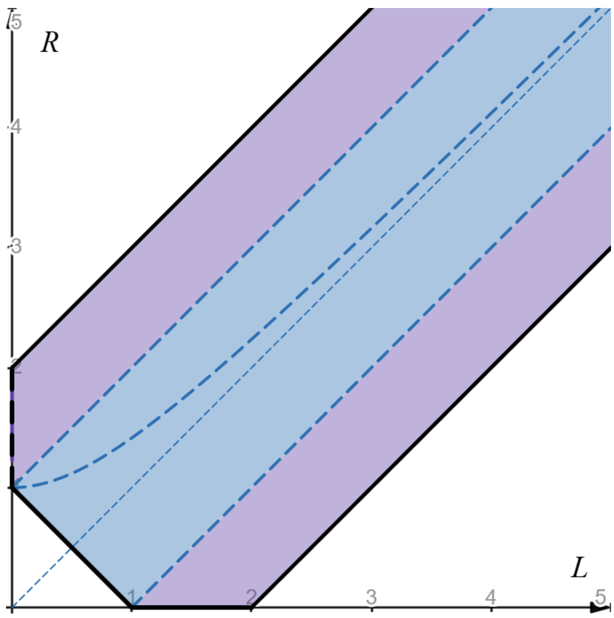

Рис. : Образ отображения момента обратного магнитного биллиарда, ограниченного дополнительной окружностью. Бифуркационная диаграмма.