Секция «19.6 Геометрия и топология»

Динамика плоского интегрируемого биллиарда, ограниченного псевдоокружностями, без воздействия внешних сил и в потенциальном поле

Научный руководитель – Ведюшкина Виктория Викторовна

Шадрина Екатерина Дмитриевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ekaterina.shadrina@math.msu.ru

На плоскости Минковского рассмотрим семейство псевдоокружностей, которое задаётся соотношением: $x^2-y^2=a-\lambda$, где $a>0, \lambda\in\mathbb{R}$. Будем исследовать математические биллиарды, ограниченные прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями данного семейства (рис.1, рис.2). Оказывается, такие биллиарды — интегрируемы, первые интегралы — функции $\Lambda = a+\frac{(v_2x-v_1y)^2}{v_1^2-v_2^2}, H=v_1^2-v_2^2$; где $v=(v_1,v_2)$ — вектор скорости частицы, (x,y) — точка биллиарда. Справедливы следующие:

Утверждение 1. Рассмотрим математический биллиард на плоскости Минковского в области на рис.1, $a>\lambda_1>\lambda_2$. Пусть $M\subset Q^3$ — поверхность уровня интеграла Λ. Тогда M гомеоморфна: окружности — при $H<0, \Lambda=\lambda_1$; двумерному тору — при $H<0, \Lambda<\lambda_1$ и $H>0, \Lambda>a$; цилиндру — при $H>0, \Lambda=a$. При всех остальных значениях функций Λ и H траекторий нет.

Утверждение 2. Рассмотрим математический биллиард на плоскости Минковского в области на рис.2, $a>\lambda_1$. Тогда при $\Lambda\neq a$ траектория частицы — ломаная, вдоль которой частица за конечное время достигает начала координат. При $\Lambda=a$ траекторий нет.

Пусть на плоскости Минковского в области на рис.1 при движении частицы на неё действует потенциал $U(x^2-y^2)$. Интегрируемость в этом случае сохраняется. Первые интегралы — функции $H=\frac{1}{2}(p_x^2-p_y^2)+U(x^2-y^2), F=(p_yx+p_xy)^2$; где $p=(p_x,p_y)$ — импульс частицы, (x,y) — точка биллиарда. Зафиксируем значения первых интегралов $H=h$ и $F=f$ и положим $U(x^2-y^2):=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Справедлива следующая

Теорема 1. Бифуркационная диаграмма математического биллиарда с потенциалом $U(x^2-y^2):=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ на плоскости Минковского в области на рис.1 имеет следующий вид:

Дуга гиперболы $f=\frac{1}{2h}$ при $\frac{1}{2r_2}<h<\frac{1}{2r_1}$: получаемый слой гомеоморфен особому слою атома B;

Луч $f=2r_1-2hr_1^2$ при $h<\frac{1}{r_1+r_2}$: получаемый слой гомеоморфен окружности;

Интервал $f=2r_2-2hr_2^2$ при $\frac{1}{r_1+r_2}<h<\frac{1}{r_2}$: получаемый слой гомеоморфен окружности;

Точка $f=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}, h=\frac{1}{r_1+r_2}$: получаемый слой гомеоморфен двум непересекающимся окружностям;

Луч $f=0$ при $h>\frac{1}{r_2}$: получаемый слой гомеоморфен цилиндру;

где $r_1:=\sqrt{a-\lambda_1}, r_2:=\sqrt{a-\lambda_2}$.

Источники и литература

1) Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // Матем. сб., 2021. Т.212, №2. С.81-105.

2) Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Биллиарды и интегрируемые системы // УМН., 2023. Т.78, вып.5(473). С.93-176.

Иллюстрации

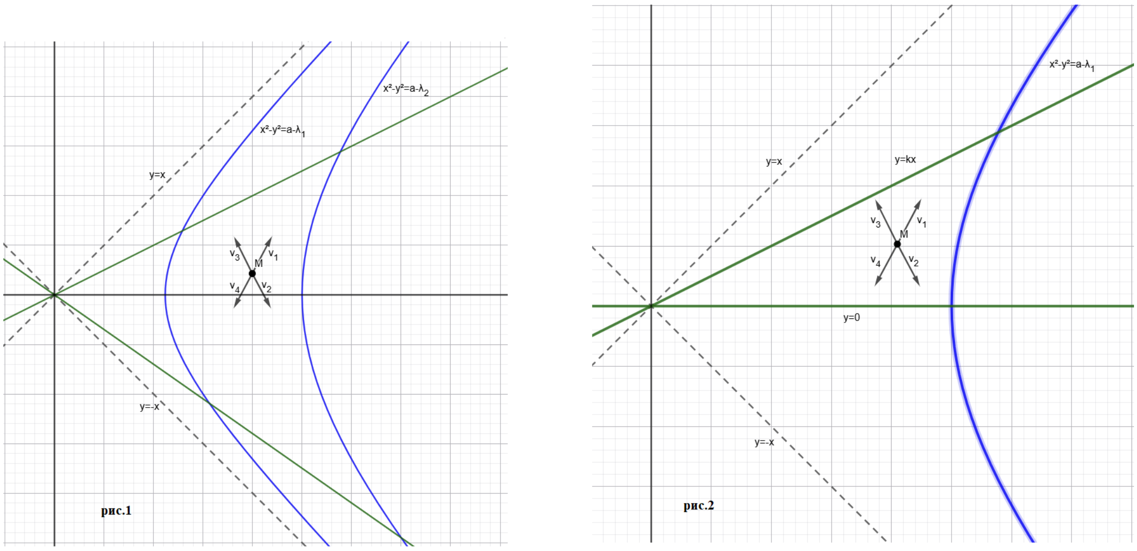

Рис. : Области

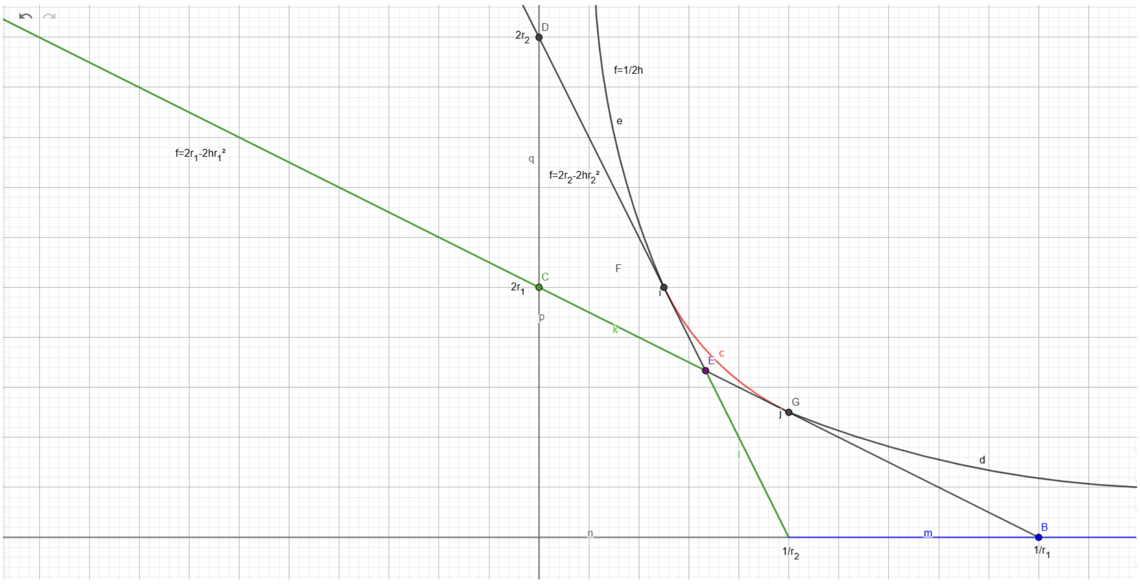

Рис. : Бифуркационная диаграмма