Секция «19.6 Геометрия и топология»

Структура группы Якобиана конусов над сэндвич-графами

Научный руководитель – Медных Александр Дмитриевич

Соколова Галина Константиновна

Аспирант

Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: g.sokolova@g.nsu.ru

Группа Якобиана является алгебраическим инвариантом для всякого конечного графа, а порядок якобиана есть спектральная характеристика данного графа. Понятие группы Якобиана возникло как дискретный аналог якобиана из теории римановых поверхностей. Структура якобианов графов известна только в некоторых случаях, см. обзор [1]. В данном докладе исследуется структура якобианов конусов над сэндвич-графами.

Рассмотрим лапласиан $\mathcal{L}_G$ связного графа G как линейный оператор $\mathcal{L}_G : \mathbb{Z}^{|V|} \to \mathbb{Z}^{|V|}$, где $|V|$ — количество вершин в графе. Тогда коядро $\operatorname{coker} \mathcal{L}_G = \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} \mathcal{L}_G$ — абелева группа, где образ оператора $\operatorname{im} \mathcal{L}_G = \mathcal{L}^T \mathbb{Z}^{|V|}$, а *якобиан* $Jac(G)$ графа G определяется как группа кручения $\operatorname{coker} \mathcal{L}_G$. Введём определение сэндвич-графа.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим конечное множество целых чисел $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant \frac{n}{2}$. Граф $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах называют *циркулянтным графом*, если каждая его i-я вершина смежна с вершинами $i \pm s_1, \ldots, i \pm s_k$ по модулю n. Пусть P_m — граф-путь с вершинами v_j. Рассмотрим набор циркулянтных графов $G_j = C_n(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jk_j})$ на n вершинах, $j = 1, 2, \ldots, m$. Определим *сэндвич-граф* $SG_n = SG_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ как граф с множеством вершин $V(SG_n) = \{(\ell, v_j) \mid \ell = 1, 2, \ldots n,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$, где любая вершина (ℓ, v_j) смежна с вершинами $(\ell \pm s_{ij1}, v_i), (\ell \pm s_{j2}, v_j), \ldots, (\ell \pm s_{jk_j}, v_j)$ по модулю n, и для всех $\ell = 1, 2, \ldots n$ вершины (ℓ, v_1), $(\ell, v_2), \ldots, (\ell, v_m)$ образуют граф-путь P_m.

Положим, v — граф-вершина. *Конусом над графом* G называется граф $\widehat{G} = G \star \{v\}$ с множеством вершин $V(\widehat{G}) = V(G) \cup v$ и рёбер $E(\widehat{G}) = E(G) \cup \{\{w, v\},\ w \in V(G)\}$. Пусть $\widehat{SG}_n$ — конус над сэндвич-графом, и $P(t)$ — полином, ассоциированный с конусом $\widehat{SG}_n$. Согласно работе [2], полином $P(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — палиндромный полином Лорана, значит, существует преобразование Чебышёва такое, что $P(t) = Q \circ h(t)$, где $h(t) = t^{-1} + t$. Введём сопровождающие матрицы C_P и C_Q для полиномов $P(t)$ и $Q(t)$, и обозначим полиномы Чебышёва степени s второго и четвёртого рода как $\mathcal{U}_s(t)$ и $\mathcal{W}_s(t)$ соответственно.

Теорема. *Для якобиана $Jac(\widehat{SG}_n)$ конуса $\widehat{SG}_n$ имеют место утверждения.*

1. *При $n = 2r + 1$ найдётся эпиморфизм $\varphi : Jac(\widehat{SG}_{2r+1}) \to Jac(\widehat{SG}_1)$, ядро которого — прямая сумма двух копий абелевой группы, представимой матрицей $\mathcal{W}_r\,(C_Q/2)$.*
2. *При $n = 2r$ существует эпиморфизм $\varphi : Jac(\widehat{SG}_{2r}) \to Jac(\widehat{SG}_2)$, ядро которого — прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей $\mathcal{U}_{r-1}\,(C_Q/2)$.*

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке в рамках соглашения № 075-15-2025-348 с Министерством науки и высшего образования РФ.

Источники и литература

1) Медных А.Д., Медных И.А. Циклические накрытия графов. Перечисление отмеченных остовных лесов и деревьев, индекс Кирхгофа и якобианы // УМН. 2023. Т. 78, вып. 3 (471). С. 115–164.
2) Grunwald L.A. The critical group of the cone over a sandwich graph // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2025. Vol. 22, No. 2. P. 1255–1265.