

Формула типа Атьи-Ботта-Лефшеца и её приложение к операторам с конечной группой сдвигов

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Орлова Наталья Романовна

Сотрудник

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: izvarina-n@mail.ru

В настоящей работе получена формула типа Атьи-Ботта-Лефшеца (далее АБЛ) [1] в абстрактной ситуации. На гладком замкнутом многообразии M рассматривается коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_0) & \xrightarrow{D_0} & C^\infty(M, E_1) & \xrightarrow{D_1} & \dots \xrightarrow{D_{m-1}} C^\infty(M, E_m) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow T_0 & & \downarrow T_1 & & \downarrow T_m \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_0) & \xrightarrow{D_0} & C^\infty(M, E_1) & \xrightarrow{D_1} & \dots \xrightarrow{D_{m-1}} C^\infty(M, E_m) \longrightarrow 0, \end{array}$$

где строки — комплексы, состоящие из непрерывных операторов, действующих в пространствах гладких сечений комплексных векторных расслоений E_j , вертикальные отображения также предполагаются непрерывными. Мы не делаем никаких предположений о природе операторов в комплексе и операторов, задающих эндоморфизм комплекса. Предполагается только, что комплекс имеет параметрикс с точностью до операторов с гладким ядром. Это обеспечивает конечномерность когомологий $\mathcal{H}^j = \ker D_j / \text{im} D_{j-1}$. Определяется число Лефшеца эндоморфизма:

$$L(T, D) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \text{tr} \tilde{T}_j,$$

где $\tilde{T}_j : \mathcal{H}^j \longrightarrow \mathcal{H}^j$ — действие эндоморфизма в когомологиях. Далее накладывается геометрическое условие на волновой фронт ядра Шварца этого эндоморфизма и его композиций с операторами из комплекса и его параметрикса. При этих предположениях наш основной результат — формула типа АБЛ — принимает вид

$$L(T, D) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \tau(T_j), \tag{1}$$

где $\tau(T_j)$ — регуляризованный след оператора T_j . При этом регуляризованный след оператора определяется как интеграл от сужения его ядра Шварца на диагональ $\Delta \subset M \times M$.

В работе даётся приложение формулы (1) для комплексов операторов со сдвигами, ассоциированными с действием конечной группы Γ на многообразии M , и геометрические эндоморфизмы таких комплексов, определяемые гладким отображением $g : M \rightarrow M$. В случае, когда точки совпадения $g(x) = \gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$, являются невырожденными, получена формула Лефшеца.

Результаты, представленные в докладе, получены в совместной работе с Савиным А.Ю. Работа выполнена в рамках государственного задания (проект FSSF-2026-0013).

Источники и литература

- 1) M. F. Atiyah and R. Bott. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. Math. 1967. No. 86. С. 374–407.