

Максимальные идеалы C^* -алгебр и максимальные подмодули гильбертовых модулей

Научный руководитель – Троицкий Евгений Вадимович

Леков Александр Игоревич

Студент (магистр)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E-mail: lekov.ai@phystech.edu

В теории банаховых алгебр хорошо известен факт замкнутости максимальных модулярных правых идеалов. В частности, для C^* -алгебр этот результат не требует условия модулярности: любой максимальный правый идеал в C^* -алгебре автоматически замкнут [1]. Естественным обобщением является вопрос о замкнутости максимальных правых подмодулей в гильбертовых C^* -модулях. В работе исследуется данный вопрос, демонстрируется, что в общем случае ответ отрицательный, и устанавливается положительный результат для класса конечно порожденных модулей.

Основой для доказательства в случае идеалов служит теорема о факторизации элементов банахова модуля [2]. Для левого банахова A -модуля \mathcal{L} над C^* -алгеброй A теорема утверждает, что для любого $z \in \mathcal{L}$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $\sigma \in A$ и $y \in \mathcal{L}$, что $z = \sigma y$, причем $\|y - z\| \leq \varepsilon$ и $\|\sigma\| \leq 1$ [3]. Это позволяет, рассматривая максимальный правый идеал M и фундаментальную последовательность в нем, свести задачу к исследованию аннуляторного идеала, замкнутость которого следует из общих свойств C^* -алгебр [1].

В отличие от идеалов, максимальные подмодули гильбертовых C^* -модулей не обязаны быть замкнутыми. Для построения контрпримера рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство H . Используя базис Гамеля, можно определить неограниченный линейный функционал $\phi : H \rightarrow \mathbb{C}$, ядро которого $H_0 = \ker \phi$ является незамкнутым максимальным подпространством в H . Рассматривая H как гильбертов C^* -модуль над \mathbb{C} , получаем искомый пример незамкнутого максимального подмодуля.

Более содержательный пример строится над коммутативной C^* -алгеброй $C(X)$, где X – компакт. Пусть $\mathcal{M} = l^2(C(X))$ – стандартный гильбертов $C(X)$ -модуль. С ним ассоциировано расслоение $\xi = (p, E, X)$ со слоем $l^2(\mathbb{C})$ и пространством непрерывных сечений $\Gamma(E)$, которое $C(X)$ -изоморфно \mathcal{M} . Зафиксировав точку $x_0 \in X$ и выбрав в слое $E_{x_0} \cong l^2(\mathbb{C})$ незамкнутое максимальное подпространство \mathcal{H}_0 (ядро неограниченного функционала), определим подмодуль

$$\mathcal{L}_{x_0} = \{\sigma \in \Gamma(E) \mid \sigma(x_0) \in \mathcal{H}_0\}.$$

Можно показать, что \mathcal{L}_{x_0} является максимальным и всюду плотным в $\Gamma(E)$, а следовательно, незамкнутым подмодулем в \mathcal{M} .

В случае, когда гильбертов C^* -модуль \mathcal{M} является конечно порожденным над унитарной C^* -алгеброй A , ситуация меняется. Конечная порожденность означает существование эпиморфизма $f : A^n \rightarrow \mathcal{M}$. Множество эпиморфизмов открыто в пространстве ограниченных линейных отображений [4]. Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что любое близкое к f отображение также сюръективно [5]. Если предположить, что максимальный подмодуль $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ не замкнут, то его замыкание совпадает с \mathcal{M} . Тогда для образующих a_1, \dots, a_n модуля \mathcal{M} существуют сколь угодно близкие элементы $a'_1, \dots, a'_n \in \mathcal{L}$. При достаточно малом отклонении индуцированное ими отображение $g : A^n \rightarrow \mathcal{M}$ останется эпиморфизмом, откуда $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, что противоречит максимальнойности \mathcal{L} .

Таким образом, показано, что свойство замкнутости максимальных подмодулей не переносится с идеалов C^* -алгебр на гильбертовы C^* -модули. Ключевую роль в построении контрпримера играет существование неограниченных функционалов в бесконечномерных пространствах. В то же время, для конечно порожденных гильбертовых модулей над унитарными C^* -алгебрами максимальные подмодули являются замкнутыми.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 25-11-00018).

Источники и литература

- 1) Мерфи, Дж. C^* -алгебры и теория операторов. – М.: Факториал, 1997.
- 2) Рудин, У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
- 3) Троицкий, Е. В., Мануйлов, В. М. Гильбертовы C^* -модули. – М.: МЦНМО, 2000.
- 4) Dales, H. G. Banach algebras and automatic continuity. – Clarendon Press, 2000.
- 5) Hewitt, E. The ranges of certain convolution operators // *Mathematica Scandinavica*. – 1964. – Vol. 15, no. 2. – P. 147–155.