

Канонический вид тензора инерции волчков в псевдо-евклидовом пространстве

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Шуберт Анастасия Юрьевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия

E-mail: anastasiia.shubert@math.msu.ru

Работа посвящена изучению тензора инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом векторном пространстве (V, g) . Конфигурационное многообразие тарелки на (псевдо-)сфере (т.е. твердого тела на сфере или плоскости Лобачевского) такое же, как и для твердого тела с неподвижной точкой (т.е. волчка) в пространстве (V, g) , и совпадает с группой Ли автоморфизмов пространства (V, g) , изоморфной группе $O(3)$ [1] или $O(2, 1)$. Кинетическая энергия является левоинвариантной (псевдо-)римановой метрикой на конфигурационном многообразии [2], поэтому полностью определяется своим значением в единице группы, являющимся квадратичной формой на соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g} \cong so(3)$ или $\mathfrak{g} \cong so(2, 1)$. Отвечающий этой квадратичной форме симметрический оператор $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ на этой алгебре Ли называется *тензором инерции* [2] твердого тела.

Для его вычисления введено [3] «псевдо-евклидово векторное произведение» $[\cdot, \cdot]_g$ в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) . С помощью этой операции построены [3] симметрический оператор $\hat{J} = -\sum_{i=1}^n m_i ([\mathbf{q}_i, \cdot]_g)^2 : V \rightarrow V$, называемый *оператором инерции* твердого тела, и изоморфизм векторных пространств $V \cong \mathfrak{g}$, $\mathbf{q} \mapsto [\mathbf{q}, \cdot]_g$, когда волчок состоит из точек $\mathbf{q}_i \in V$ с массами m_i . Доказано [3], что при этом изоморфизме построенная операция $[\cdot, \cdot]_g$ преобразуется в скобку Ли на алгебре Ли \mathfrak{g} , скалярное произведение g — в форму Киллинга–Картана с точностью до скалярного множителя, а симметрический оператор $g\hat{J} : V \rightarrow V^*$ — в тензор инерции J .

Изучен оператор инерции \hat{J} для однотоочечных и многотоочечных твердых тел в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве. Получены следующие результаты:

1) полное описание всех твердых тел, для которых оператор инерции \hat{J} не приводится к диагональному виду ни в каком g -ортонормированном базисе (оказалось, что любое такое тело содержится в плоскости, касательной к световому конусу) [3],

2) описание канонического вида оператора инерции \hat{J} для всех твердых тел, включая недиагонализуемый случай, и для всех тарелок на плоскости Лобачевского; формулы и неравенства треугольника для главных моментов инерции, их связь с формой тела,

3) теоремы реализации пары троек (J_1, J_2, J_3) , $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ как диагональных элементов матрицы оператора инерции \hat{J} и точки центра масс $\mathbf{c} \in V$ в g -ортонормированном базисе для диагонализуемого и недиагонализуемого случаев.

Автор приносит благодарность Е.А. Кудрявцевой за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект N 24-71-10100).

Источники и литература

- 1) Арнольд В.И., Математические методы классической механики. М., 1989.
- 2) Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М., 2007.
- 3) Шуберт А.Ю. Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдо-евклидовом пространстве // Чебышев. сб. 2025. Т. 26, No. 2. С. 232-253.