Секция «19.6 Геометрия и топология»

Полуглобальная топологическая классификация особенностей коранга 1 интегрируемых систем с тремя степенями свободы

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Онуфриенко Мария Викторовна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

В работе изучаются особенности коранга 1 вещественно-аналитических интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями свободы ($n := 3$). Рассматривается малая окрестность компактной двумерной (т.е. особой) орбиты гамильтонова $\mathbb{R}^3$-действия, порожденного первыми интегралами системы. Она симплектоморфна “полноторию” ($D^4 \times \mathbb{T}^2, \sum_{i=1}^2 \mathrm{d}I_i \wedge \mathrm{d}\varphi_i + \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$). Эту окрестность нам будет удобнее моделировать как результат факторизации полнотория по действию циклической группы $\Gamma = \langle \Psi \rangle \cong \mathbb{Z}_d$:

$$M^6 = \widetilde{U}/\Gamma \approx (D^2 \times \mathbb{T}^2 \times D^2)/\langle \Psi \rangle, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{d}I_i \wedge \mathrm{d}\varphi_i + \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q,$$

с координатами $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, p, q)$. Действие монодромии имеет вид

$$\Psi(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, p + iq) = (I_1, I_2, \varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, e^{2\pi i \ell/d}(p + iq)),$$

где $0 \leq \ell < d$, $(\ell, d) = 1$, а $d \in \mathbb{N}$ — порядок резонанса.

Первыми интегралами системы являются функции $f_i = I_i$ ($i = 1, 2$) и гамильтониан H. В окрестности особой орбиты приведенный гамильтониан зависит от переменных (p, q) и двух параметров $\varepsilon_i = I_i$, т.е. имеет вид $H^\varepsilon(p, q)$. Он инвариантен относительно действия группы $\Gamma \cong \mathbb{Z}_d$ и поэтому представим [1] в виде степенного ряда

$$H^\varepsilon = h^\varepsilon(B, R, \widehat{R}) = \sum_{i,j,k,\ell \geq 0} a_i R^i + b_j B^j + c_{k\ell} \varepsilon^k B^\ell + \dots, \qquad B = p^2 + q^2, \quad R + i\widehat{R} = (p + iq)^d.$$

Теорема 1 (полулокальная классификация [1, 2])**.** Предположим, что гамильтониан $H^\varepsilon = h^\varepsilon(B, R, \widehat{R})$ является невырожденным в смысле условий на коэффициенты разложения (в случае $d \geq 7$ эти условия имеют вид $b_1 \neq 0$ или $a_1 b_2 c_{11} \neq 0$ или $a_1 b_3 \det\{c_{k\ell}\}_{k,\ell=1}^2 \neq 0$). Тогда существуют число $n' \leq n$, росток функции $\nu : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^{n'-1+m}, 0)$ и 1-параметрические семейства ростков диффеоморфизмов (не обязательно симплектических) $\phi^\varepsilon : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $\Phi^\varepsilon : (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ такие, что

$$\phi^\varepsilon \circ H^\varepsilon = G_{n'-1}^{\nu(\varepsilon)} \circ \Phi^\varepsilon$$

вблизи особой орбиты $\mathcal{O} = (0^2 \times \mathbb{T}^2 \times 0^2)/\Psi$. Здесь $G_{n'-1}^{\nu}$ — стандартная функция, вид которой определяется порядком резонанса d (см. ниже).

Таким образом, по теореме 1 гамильтониан H^ε вблизи любой особой орбиты коранга 1 “общего положения” (т.е. в точках, где $\mathrm{rk}\, d(I_1, I_2, H^\varepsilon) = 2$) гладко эквивалентен стандартной функции $G_{n'-1}^{\nu}$ следующего вида:

$$G_{n'-1}^{\nu} := G_{d,n'-1}^{\delta,\alpha}(p, q), \qquad G_{d,0} := \eta p^2 + q^2, \quad \eta = \pm 1, \quad d = 1, 2, \qquad n' = 1,$$

$$G_1^\nu := \begin{cases} R+B^3 & +\delta_1 B & & \text{при } d=1 \\ \eta R+B^2 & +\delta_1 B, & \eta=\pm1 & \text{при } d=2 \\ R & +\delta_1 B & & \text{при } d=3 \\ R+\alpha B^2 & +\delta_1 B, & \alpha^2\neq 1,\ \eta=\operatorname{sgn}(\alpha^2-1) & \text{при } d=4 \\ R+B^2 & +\delta_1 B & & \text{при } d\geq 5, \end{cases} \qquad n'=2,$$

$$G_2^\nu := \begin{cases} \eta R+B^4 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B, & \eta=\pm1 & \text{при } d=1, \\ \eta R+B^3 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B, & \eta=\pm1 & \text{при } d=2, \\ R+\eta B^2+B^3 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B, & \eta=\pm1 & \text{при } d=4, \\ R+B^3 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B & & \text{при } d=5, \\ R+\alpha B^3+B^4 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B, & \alpha^2\neq 1,\ \eta=\operatorname{sgn}(\alpha^2-1) & \text{при } d=6, \\ R+B^3+\alpha B^4 & +\delta_2 B^2+\delta_1 B, & \alpha\in\mathbb{R} & \text{при } d\geq 7, \end{cases} \qquad n'=3.$$

Здесь $B, R, \widehat{R}$ — инварианты действия группы $\mathbb{Z}_d$ на плоскости (p,q), δ_1 — параметр расстройки (detuning), $\alpha\in\mathbb{R}^m$ — “модуль”, а $m\in\{0,1\}$ — модальность.

Топологию слоения вблизи особой орбиты при $n'=1$ обозначим через $\mathcal{A}$ ($d=1$, $\eta=1$), $\mathcal{B}$ ($d=1$, $\eta=-1$) и $\mathcal{A}^*$ ($d=2$, $\eta=-1$), через $\mathcal{P}^\eta_{\ell/d}$ при $n'=2$, и через $\mathcal{W}^\eta_{\ell/d}$ — при $n'=3$.

Для перехода от полулокальной классификации (в окрестности особой орбиты) к полуглобальной (в окрестности компактного слоя Лиувилля) изучим бифуркации компактных слоев при изменении значений первых интегралов. Для этого опишем топологию окрестности особого слоя, содержащего данную орбиту, вместе со слоением Лиувилля в ней.

Теорема 2 (полуглобальная классификация [2])**.** Предположим, что совместное множество уровня первых интегралов (особый слой) компактен и содержит лишь одну особую орбиту, причем она двумерна. Тогда для слоения Лиувилля в малой окрестности этого особого слоя возможны следующие случаи. В **9 случаях** особая орбита совпадает с особым слоем слоения Лиувилля, поэтому полулокальная особенность совпадает с полуглобальной. Это так называемые *суперкритические* особенности (устойчивые при $\varepsilon=0$):

$$\mathcal{A},\quad \mathcal{P}^+_{1/2},\quad \mathcal{P}^+_{1/4},\quad \mathcal{P}_{\ell/d}\ (d\geq 5),\quad \mathcal{W}^+_0,\quad \mathcal{W}^+_{1/2},\quad \mathcal{W}^+_{1/4},\quad \mathcal{W}^+_{1/6},\quad \mathcal{W}_{\ell/d}\ (d\geq 7).$$

В **10 случаях** каждой полулокальной особенности (все они *субкритические*, т.е. неустойчивые при $\varepsilon=0$) соответствует *единственный* класс топологической эквивалентности полуглобальной особенности:

$$\mathcal{B},\quad \mathcal{A}^*,\quad \mathcal{P}_0,\quad \mathcal{P}^-_{1/2},\quad \mathcal{P}_{1/3},\quad \mathcal{P}^-_{1/4},\quad \mathcal{W}^-_{1/2},\quad \mathcal{W}^-_{1/4},\quad \mathcal{W}_{\ell/5},\quad \mathcal{W}^-_{1/6}.$$

Полулокальной особенности $\mathcal{W}^-_0$ (субкритический ласточкин хвост) отвечают *ровно две* топологически различные полуглобальные особенности.

Эти результаты обобщают полулокальную классификацию В.В. Калашникова (1998) особенностей интегрируемых систем на случай 3 степеней свободы (теорема 1) и описывают все бифуркации торов Лиувилля (теорема 2) “общего положения” коранга 1.

Автор благодарен Е.А.Кудрявцевой за постановку задачи и ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 24-71-10100) в МГУ им. М.В.Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russ. J. Math. Phys. 2023. Vol. 30, no. 1. P. 76–94.
2) Ali A.Z., Kibkalo V.A., Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Bifurcations in integrable Hamiltonian systems near corank-one singularities // Diff. Eqns. 2024. Vol. 60, no. 10. P. 1311–1368.