

Расстояние Громова–Хаусдорфа между произведениями метрических пространств

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Абдуллаев Эмин Алиевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия

E-mail: emin.abdullaev@math.msu.ru

Пространство Громова–Хаусдорфа, состоящее из непустых метрических компактов, является центральным объектом современной метрической геометрии. Основы теории заложили Ф. Хаусдорф [10], Д. Эдвардс [7] и М. Громов [9]. Известно, что это пространство линейно связное, полное, сепарабельное и геодезическое [1, 6, 9].

Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа — NP-трудная задача [13, 14], требующая минимизации искажения по всем возможным соответствиям. Это делает актуальным поиск двусторонних оценок для конкретных классов пространств. Ранее были получены оценки для сфер [4, 12], симплексов и ультраметрических пространств [3, 8]. С помощью числа Борсука [2] найдены условия достижимости верхней оценки расстояния. Концепция непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа развита в работах [5, 11, 12].

Настоящая работа посвящена оценкам расстояния между произведениями метрических пространств (подробные результаты автора см. в arXiv:2603.00796). Получены двусторонние оценки для произведений в общем случае, часть результатов перенесена на непрерывное расстояние. Для линейных произведений верхняя оценка улучшена и найдены достаточные условия её точности. В частности, для некоторых произведений и плоских торов получены формулы для вычисления расстояния. Доказано, что для любого ограниченного метрического пространства расстояние между ним и его произведением (с числом множителей не менее плотности пространства) равно половине его диаметра. Для сепарабельных пространств результат верен при счетном числе множителей. Также показано вырождение индуцированной полуметрики на классах гомеоморфности компактов фиксированного диаметра.

Источники и литература

- 1) А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин. Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Математические заметки. 2016. Т. 100. № 6. С. 947–950.
- 2) А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа с помощью числа Борсука // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2023. № 1. С. 33–38.
- 3) А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов и некоторые приложения к дискретной оптимизации // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 2. С. 169–189.
- 4) H. Adams, J. Bush, F. Frick et al. Gromov–Hausdorff distances, Borsuk–Ulam theorems, and Vietoris–Rips complexes. 2023. arXiv:2301.00246 [math.MG].
- 5) S. A. Bogaty, A. A. Tuzhilin. Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance. 2025. arXiv:2512.02611.

- 6) D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics 33 A.M.S., Providence, RI, 2001.
- 7) D. Edwards. The Structure of Superspace // Studies in Topology. ed. by N. M. Stavrakas and K. R. Allen. Academic Press, Inc. New York, London, San Francisco, 1975.
- 8) D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin. Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes. arXiv preprint arXiv:1906.09644. 2019.
- 9) M. Gromov. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. 53. 1981.
- 10) F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, Veit, 1914.
- 11) J. Lee, C. Morales. Gromov–Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs. Birkhäuser/Springer, 2022.
- 12) S. Lim, F. Memoli, Z. Smith. The Gromov–Hausdorff distance between spheres // Geometry & Topology. 2023. V. 27. № 9. P. 3733–3800.
- 13) F. Memoli, Z. T. Smith. Embedding-projection correspondences for the estimation of the Gromov-Hausdorff distance. 2024. arXiv preprint arXiv:2407.03295 [math.MG].
- 14) F. Schmiedl. Computational aspects of the Gromov–Hausdorff distance and its application in non-rigid shape matching // Discrete and Computational Geometry. 2017. V. 57. № 4. P. 854–880.