Секция «19.6 Геометрия и топология»

Тензор Нийенхейса и операторные поля в верхнетреугольной тёплицевой форме (совместно с А.Ю.Коняевым)

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Чернин Михаил Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: Chernin_03@mail.ru

Операторные поля, локально представимые в верхнетреугольной теплицевой форме (т.е. в виде $L = g_1 J^{n-1} + \dots + g_n \operatorname{Id}$, где J — стандартный жорданов блок размерности n), возникают в различных областях математики и математической физики: от геометрии многообразий Фробениуса и F-многообразий [1] до редукций гидродинамических цепей, теории солитонного газа и геометрии Нийенхейса [2,3]. Ключевой вопрос о классификации замен координат $v(u)$, сохраняющих данную структуру, оставался открытым. В настоящей работе эта задача решена в полной общности при условии регулярности $g_{n-1} \neq 0$, гарантирующем, что оператор L подобен жордановой клетке максимального размера.

Основной результат состоит в описании группы преобразований, сохраняющих теплицеву форму. Показано, что все такие замены координат параметризуемы одной функцией одной переменной и $n-1$ функцией двух переменных. Предложен конструктивный алгоритм, позволяющий по заданному набору произвольных функций восстановить соответствующее преобразование $v(u)$. Алгоритм сводится к рекуррентной процедуре, включающей решение треугольных линейных систем и последующее интегрирование, что продемонстрировано явными формулами для размерности $n = 4$.

Ключевую роль в построении играет связь с геометрией Нийенхейса. В работе доказано, что при $g_{n-1} \neq 0$ операторное поле L в верхнетреугольной теплицевой форме является оператором Нийенхейса ($\mathcal{N}_L = 0$) тогда и только тогда, когда его компоненты удовлетворяют переопределенной системе

$$J^{2*} g_i - 2J^* g_{i+1} + g_{i+2} = 0.$$

Найдено общее решение этой системы, выражающее L через матричнозначные функции $f_i(P, Q)$, где $P = u^1 J^{n-1} + \dots + u^n \operatorname{Id}$, а Q — его формальная производная по J. Это описание позволяет связать искомые замены координат с решениями уравнений $M^* v^i = v^{i+1}$ для некоторого оператора Нийенхейса M, что и дает параметризацию всех преобразований, сохраняющих исходную верхнетреугольную теплицеву форму. Полученные результаты имеют фундаментальное значение для изучения недиагонализуемых квазилинейных систем и теории интегрируемых структур.

Источники и литература

1) Antonov E.I., Konyaev A.Yu. Nijenhuis operators with a unity and F-manifolds // Journal of the London Mathematical Society. 2024. Vol. 110, no. 3. P. e12983.
2) Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Nijenhuis geometry // Advances in Mathematics. 2022. Vol. 394. P. 108001.
3) Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Nijenhuis geometry IV: conservation laws, symmetries and integration of certain non-diagonalisable systems of hydrodynamic type in quadratures // Nonlinearity. 2024. Vol. 37, no. 10. P. 105003.