

Метод отыскания множественных решений систем нелинейных уравнений с применением автоматического дифференцирования

Научный руководитель – Терехов Кирилл Михайлович

Хаметов Марк Владимирович

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Филиал МГУ в городе Сарове, Саров, Россия

E-mail: khametovmv@my.msu.ru

В работе ставится и решается задача по отысканию множественных решений системы нелинейных уравнений на примере стационарных уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Для поиска различных ветвей решений используется метод дефляций. Актуальность темы выражается применимостью моделей для анализа турбулентных течений при обтекании тел, либо в ограниченных областях.

Дана задача – полуэллиптическая каверна с подвижной крышкой. Область двумерная. Нижняя граница – граница прилипания, нижняя половина эллипса. Верхняя граница – подвижная крышка, отрезок $y=0.25$, $x \in [0,1]$. Граничные условия на крышке $u=(1,0)$. Граничные условия на стенке $u=(0,0)$.

Множественные решения в задаче возникают при больших значениях числа Рейнольдса $Re \gg 1$, когда инерционные силы доминируют над вязкими. Для нашей области второе решение возникает для $Re \approx 5050$. Тогда число Рейнольдса выступает в качестве параметра нашей задачи.

Для дискретизации используется метод конечных элементов из программного пакета FEniCS. Область покрывается треугольной Gmsh сеткой. Для численного решения используется классическая пара конечных элементов Тейлора-Худа (P2-P1). Используются встроенные линейные решатели (MUMPS).

Получаемая дискретная система решается итерационно. Построен гибридный нелинейный решатель. Он состоит из метода Пикара с релаксацией и метода Ньютона с линейным поиском. Для поиска решений на вторичных ветвях строится оператор дефляции на каждой итерации для каждого уже найденного решения при фиксированном значении параметра.

Для поиска новых решений при фиксированном значении параметра применяется Дефляция. На каждом шаге метода Ньютона вычисляется масштабирующий коэффициент τ , который умножается на шаг Ньютона до выполнения линейного поиска. Метод Пикара обладает глобальной сходимостью и вызывается при проблемах с методом Ньютона.

На каждой итерации мы получаем шаг по одному из трех сценариев. Шаг Пикара – глобальный, надежный. Шаг Ньютона с линейным поиском при $\tau > 0$ – шаг с уменьшением невязки, возможна квадратичная сходимость. Шаг Ньютона при $\tau < 0$ – шаг с увеличением невязки (расходится), отталкивается от окрестности известного решения.

Получили для фиксированного значения $Re=5500$ первое решение из нулевого приближения, а второе решение с использованием дефляций из первого. Методом продолжения по параметру построили оба решения для значений $5050 \leq Re \leq 14000$.

Создан комбинированный подход для поиска множества решений нелинейной задачи течения в каверне, сочетающий метод Ньютона с дефляцией и линейным поиском и метод Пикара с релаксацией.

Источники и литература

- 1) Prandtl L. Путеводитель по гидроаэродинамике: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2007.
- 2) Lomasov, D.V., Vabishchevich, P.N. Numerical solution of BVP for the incompressible Navier–Stokes equations at large Reynolds numbers // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2025. Vol. 40, No. 4. P. 281–295. DOI: 10.1515/rnam-2025-0021.
- 3) Erturk, E., Allahviranloo, T. Bifurcation and multiplicity of solutions of the Navier–Stokes equations in driven semi-elliptical cavity flow // Mathematics. 2022. Vol. 10, No. 22. Article 4242. DOI: 10.3390/math10224242
- 4) Farrell P.E., [и др.]. Bifurcation analysis of PDEs and VIs with deflated continuation. University of Oxford Seminar, slides: [<https://people.maths.ox.ac.uk/griffit4/bos/farrell.pdf>]. 2017.
- 5) Farrell P.E. Lecture 1: Introduction to bifurcation analysis [Lecture notes]. Káčov 2023 Summer School. 29 May 2023. URL: <https://pefarrell.org/files/kacov2023.pdf>
- 6) Beentjes C. Computing Bifurcation Diagrams with Deflation [M.Sc. thesis]. Oxford: University of Oxford, St. Catherine’s College; 2015. URL: <https://cbeentjes.github.io/files/Ramblings/MScBeentjes.pdf>
- 7) FEniCS Project: Automated solution of differential equations with finite element method. URL: <https://fenicsproject.org/>
- 8) FEM on Colab: Finite element computing in google colab. URL: <https://fem-on-colab.github.io/>

Иллюстрации

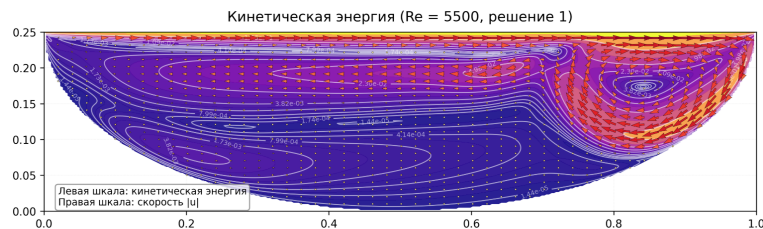


Рис. : Первое решение для Re = 5500

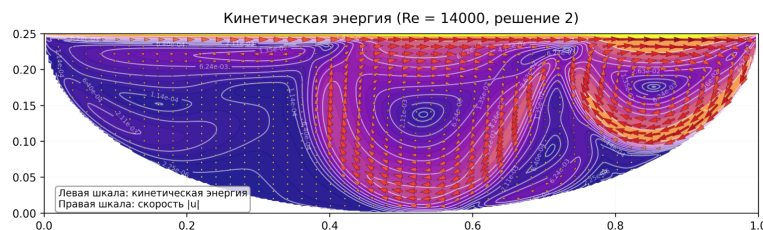


Рис. : Второе решение для Re = 14000