Секция «19.3 Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Численная стабилизация по граничным условиям для уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска — Обербека

Научный руководитель – Корнев Андрей Алексеевич

Брызгалин Данила Михайлович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра вычислительной математики, Москва, Россия

E-mail: danila.bryzgalin@math.msu.ru

<p>Исследование конвективных течений и задачи их граничного управления представляют большой теоретический и прикладной интерес. Для классической задачи управления изотермической жидкостью, описываемой уравнениями Навье — Стокса, к настоящему времени разработаны строгие методы построения стабилизирующих обратных связей [6] и численные алгоритмы [2]. В настоящей работе рассматривается развитие методов граничной стабилизации для уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска — Обербека [5] в ограниченной двумерной области. Уравнения в безразмерной форме в переменных скорость–давление–температура имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\triangle\mathbf{u} + \mathrm{Ri}\ T\ \mathbf{e}_2 - \nabla p, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T = \dfrac{1}{\mathrm{Re\ Pr}}\triangle T, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — поле скорости, T — температура, p — давление; Pr, Gr, Re, Ri — числа Прандтля, Грасгофа, Рейнольдса и Ричардсона соответственно.

Цель работы состоит в построении управления на границе по полям скорости и температуры, обеспечивающего ускорение выхода решения на заданное стационарное состояние. Для этого исследуется структура собственных функций линейного оператора Буссинеска, взятого со знаком минус, при нулевых краевых условиях. Численное решение рассматриваемой задачи строилось методом конечных разностей, при этом для аппроксимации использовались смещенные сетки В. И. Лебедева [3, 4]. В работе численно реализован алгоритм для решения спектральной задачи [1]. Показана динамика изменения нормы решения задачи (1) с заданными начальными и краевыми условиями, а также исследован механизм влияния температуры жидкости на формирование/разрушение неустойчивых вихрей.

Установлено, что для ускорения выхода решения на стационарный режим можно использовать управление температурой на границе области, что представляет собой важное упрощение по сравнению с управлением полной системой скорость–температура.</p>

Источники и литература

1) Иванчиков А. А. Численное решение некоторых спектральных задач для уравнений Стокса // Вычислительные методы и программирование, 2003. Т.4 №1. С. 227–243.
2) Корнев А.А. Моделирование процесса стабилизации по краевым условиям квазидвумерного течения четырехвихревой структуры // Матем. моделирование, 2017. Т. 29 №11. С. 99 – 110.

3) Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1964. Т.3 №4. С. 449–465.

4) Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. II // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1964. Т.4 №4. С. 649–659.

5) Сивакумар В., Сивасанкаран С. Смешанная конвекция в наклонной каверне с движущейся крышкой при неравномерном нагреве на боковых стенках // Прикл. мех. техн. физ., 2014. Т.55 №4. С. 97 – 114.

6) Фурсиков А. В. Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье — Стокса посредством управления с обратной связью с границы области //Международная математическая серия. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы, 2002. Т. 2. С. 127 – 164.