Секция «19.2 Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Потенциал Рисса переменного порядка на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости

Научный руководитель – Вакулов Борис Григорьевич

Дроботов Юрий Евгеньевич

Кандидат наук

Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: yu.e.drobotov@yandex.ru

Пусть $X = (X, d, \mu)$ — некоторое пространство с метрикой d и мерой μ, все открытые шары $B(x,h)$ в котором удовлетворяют следующему условию роста с показателем $\nu > 0$:

$$\forall x \in X: \quad \mu\left[B(x,h)\right] \le K\, h^{\nu} \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad K > 0,$$

где K не зависит ни от x, ни от h; пусть также $\mu\left[S(x,h)\right] = 0$ для всякой сферы $S(x,h)$. Считая $\Omega \subset X$ открытым ограниченным множеством, рассмотрим потенциал Рисса

$$I^{\alpha(\cdot)} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{\nu-\alpha(x)}}\, \mathrm{d}\sigma, \quad 0 < \mathrm{Re}\,[\alpha(x)] < 1, \quad x \in \Omega,$$

предполагая интегрирование в терминах меры μ, а также $\mu\left(\Pi_{\alpha}\right) = 0$, где

$$\Pi_{\alpha} := \left\{ x \in \Omega :\, \mathrm{Re}\,[\alpha(x)] = 0 \right\}.$$

Кроме того, будем считать выполненным следующее условие:

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{1}{[d(x,\sigma)]^{\nu-\alpha(x)}} - \frac{1}{[d(y,\sigma)]^{\nu-\alpha(y)}} \right\} \mathrm{d}\sigma \equiv 0, \quad x, y \in \Omega.$$

Обозначим через $M_f(x,h)$ локальный модуль непрерывности вещественнозначной функции f, определенной на Ω, [1]. Будем говорить, что функция f принадлежит пространству обобщенной переменной гёльдеровости $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$, если она удовлетворяет условию

$$M_f(x,h) \le c\,\omega(x,h), \quad 0 < c < \infty,$$

где, для всякого $x \in \Omega$, функция $\omega(x,h)$ является непрерывной, неотрицательной и почти возрастающей по h. Рассматривая в качестве веса степенную функцию вида

$$w_a(x) := [d(a,x)]^{\gamma}, \quad a \in X, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\gamma < 1 + \nu,$$

введем следующее весовое пространство функций:

$$H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) := \{ f :\, w_a\, f \in H^{\omega(\cdot)}(\Omega),\, (w_a\, f)(a) = 0 \}.$$

Настоящая работа посвящена исследованию условий ограниченности оператора $I^{\alpha(\cdot)}$ в пространствах $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$. Дополняющее полученные ранее результаты [1, 2] о действии гиперсингулярных интегралов на X в пространствах $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ в случае постоянного порядка α, данное исследование основано на подходах работы [3], позволяющих сформулировать теоремы о действии в случае переменного $\alpha(\cdot)$ в терминах функциональных классов Зигмунда–Бари–Стечкина или индексов Матушевской–Орлича.

Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2026-738.

Источники и литература

1) Дроботов Ю. Е., Вакулов Б. Г. К исследованию весовой обобщенной гельдеровости гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой // Сибирские электронные математические известия. – 2024. – Т. 21, № 2. – С. 1347–1369.
2) Drobotov Yu. E., Vakulov B. G. Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 278, № 3.
3) Вакулов Б. Г., Самко Н. Г., Самко С. Г. Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Спецвыпуск. – 2009. – С. 40–45.