

Экспоненциальная скорость сходимости итеративного марковского проектирования

Научный руководитель – Богачев Владимир Игоревич

Соколов Кирилл Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: sokolovko@my.msu.ru

В работе рассматривается задача построения моста Шрёдингера в дискретном времени на конечном множестве состояний. Предполагаются заданными начальное и конечное распределения с всюду положительными плотностями, а также опорный марковский процесс. Исследуется задача минимизации дивергенции Кульбака–Лейблера на множестве процессов с фиксированными граничными маргиналами. Для данной задачи решение существует и единственно [3].

Для численного решения этой задачи используется алгоритм Iterative Markovian Fitting (IMF), предложенный в [4] и далее теоретически обоснованный для дискретного категориального случая в [3]. Ранее для IMF была установлена сходимость к решению задачи, однако количественная оценка скорости этой сходимости отсутствовала [3-4]. В настоящей работе [5] доказываем, что IMF сходится к решению с экспоненциальной скоростью.

Ключевой шаг состоит в интерпретации итераций IMF — марковской и q -реципрокной проекций — как последовательных минимизаций функционала относительной энтропии относительно точного решения на специальных аффинных множествах вероятностных мер. Это позволяет использовать аппарат анализа методов покоординатной минимизации для сильно выпуклых функций с липшицевым градиентом [1]. Дополнительно строится инвариантная выпуклая область, содержащая последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и точное решение p^* , и на этой области устанавливаются оценки сильной выпуклости и гладкости функционала относительной энтропии. В результате получена геометрическая оценка сходимости:

$$\text{KL}(p_k \| p^*) \leq \left(1 - \frac{m^3}{4}\right)^{k-1} \text{KL}(p_0 \| p^*),$$

где параметр $m > 0$ определяется через нижние оценки опорного процесса и граничных распределений. Тем самым показано, что функционал условной энтропии убывает экспоненциально быстро к нулю при итерациях IMF. Полученный результат дополняет теоретическое понимание IMF и может быть полезен для дальнейшего анализа и развития дискретных вариантов Schrödinger Bridge Matching [2-5].

Источники и литература

- 1) A. Beck, L. Tetruashvili. *On the Convergence of Block Coordinate Descent Type Methods*. SIAM Journal on Optimization, 23(4):2037–2060, 2013.
- 2) N. Gushchin, D. Selikhanovych, S. Kholkin, E. Burnaev, A. Korotin. *Adversarial Schrödinger Bridge Matching*. Advances in Neural Information Processing Systems, 37, 2024.
- 3) G. Ksenofontov, A. Korotin. *Categorical Schrödinger Bridge Matching*. Proceedings of the 42nd International Conference on Machine Learning, PMLR 267:31727–31751, 2025.

- 4) Y. Shi, V. De Bortoli, A. Campbell, A. Doucet. *Diffusion Schrödinger Bridge Matching*. Advances in Neural Information Processing Systems, 36, 2023.
- 5) K. Sokolov, A. Korotin. *Exponential convergence rate for Iterative Markovian Fitting*. arXiv:2508.02770, 2025.