

**Аналог теоремы о полном дифференциале для локально вещественно  
аналитических функций**

**Научный руководитель – Волчков Валерий Владимирович**

**Сероштанова Карина Витальевна**

*Аспирант*

Донецкий государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений,

Донецк, Россия

*E-mail: timofeeva\_karina00@mail.ru*

Пусть в некоторой односвязной области заданы две непрерывно дифференцируемые функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . При изучении дифференциальных уравнений вида  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  возникает вопрос о том, когда выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ . Решение данной задачи можно резюмировать в виде следующей теоремы, рассматриваемой в курсе математического анализа.

**Теорема 1.** Пусть функции  $P$  и  $Q$  непрерывно дифференцируемы в односвязной области  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$  для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset D$ ;
- 2) выражение  $Pdx + Qdy$  является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области  $D$  функции  $U$ .

В доказательстве теоремы 1 используют широкий произвол в выборе контуров  $\gamma$ . Вместе с тем в ряде случаев это требование на  $\gamma$  можно значительно ослабить [1].

Пусть  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  – открытый единичный круг. Пусть также  $\mathbb{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  – замкнутый круг радиуса  $r \in (0, 1)$ . Обозначим  $\Gamma_r$  семейство окружностей вида  $\gamma_{a,b,\varphi} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a+b}{2}e^{i\varphi}| = \frac{b-a}{2}\}$ , где  $a \in (-1, -r)$ ,  $b \in (r, 1)$  и  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . Данное семейство состоит из окружностей, которые лежат в единичном круге  $\mathbb{D}$  и охватывают замкнутый круг  $\mathbb{K}_r$ . Сформулируем основной результат.

**Теорема 2.** Пусть  $r \in (0, 1)$ . Пусть также функции  $P, Q \in C^1(\mathbb{D})$  и  $P, Q$  вещественно аналитические на  $\mathbb{K}_r$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$  для любой  $\gamma \in \Gamma_r$ ;
- 2) выражение  $Pdx + Qdy$  является полным дифференциалом некоторой функции в  $\mathbb{D}$ .

Указанные явления тесно связаны с некоторыми экстремальными задачами о множествах Помпейю (см. [2]) и могут быть полезны при дальнейших исследованиях, связанных с проблемами типа Помпейю на ограниченных областях.

Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки России (темы № FREM-2026-0004 и № FRRE-2026-0015).

**Источники и литература**

- 1) Волчков В.В., Волчков Вит.В., Волčkова Н.П. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами, Матем. обр., 2021, № 4(100)-2. С. 38–48.
- 2) Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer, 2003. – P. 454.