Обобщение оценки Берри—Эссеена для многомерных мартингалов

Мирова Елизавета Сергеевна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: elith.mi29@gmail.com

***Научный руководитель** — Ульянов Владимир Васильевич*

Пусть $(\mathcal{F}_i)_{i=0}^n$ — фильтрация, а $X_1, \dots, X_n$ — мартингальные разности в $\mathbb{R}^d$: X_i измерима относительно $\mathcal{F}_i$ и $\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] = 0$. Положим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Цель работы — обобщить оценку Берри—Эссеена для гауссовской аппроксимации S_n при более слабых моментных предположениях.

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ — независимые случайные векторы $\sim N(0, I_d)$, не зависящие от $\mathcal{F}_n$, и

$$\Sigma_i = \mathbb{E}[X_i X_i^T \mid \mathcal{F}_0], \qquad Y_i = \Sigma_i^{1/2} Z_i, \qquad T_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Рассматриваем условное колмогоровское расстояние по прямоугольникам $A_r = \prod_{j=1}^d (-\infty, r_j]$:

$$d_K(S_n, T_n \mid \mathcal{F}_0) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^d} \left| \mathbb{P}(S_n \in A_r \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(T_n \in A_r \mid \mathcal{F}_0) \right|.$$

В работе Кожевникова—Сонга получена оценка такого расстояния при условии существования условного третьего момента; мы обсуждаем модификацию шага оценки остатка, позволяющую заменить третий момент на момент порядка $2 + \delta$, $\delta \in (0, 1]$.

Пусть $\|\cdot\|_\infty$ — максимальная норма в $\mathbb{R}^d$, $\ln_+ d := \max\{1, \ln d\}$. Положим

$$\underline{\lambda}^2 := \min_{1 \le i \le n} \lambda_{\min}(\Sigma_i), \qquad \bar{\sigma}_i^2 := \max_{1 \le j \le d} [\Sigma_i]_{jj}, \qquad \bar{\sigma} := \max_{1 \le i \le n} \bar{\sigma}_i.$$

Для сглаживания введём

$$\varphi_r(x, \varepsilon) = \mathbb{P}(x + \varepsilon \eta \in A_r), \qquad \eta \sim N(0, I_d),$$

а также

$$\varepsilon_i := \left(\varepsilon^2 + (n - i)\underline{\lambda}^2\right)^{1/2},$$

$$h_{1i}(\tau) := \varphi_r(S_{i-1} + \tau X_i, \varepsilon_i), \quad h_{2i}(\tau) := \varphi_r(S_{i-1} + \tau Y_i, \varepsilon_i).$$

Вместо тейлоровского остатка третьего порядка используем интегральный остаток второго порядка, что позволяет контролировать остаток через моменты порядка $2 + \delta$.

Лемма 1. *Существует универсальная константа $C > 0$ такая, что для любого $r \in \mathbb{R}^d$ и $1 \le i < n$*

$$|\mathbb{E}[\varphi_r(S_{i-1} + X_i, \varepsilon_i) - \varphi_r(S_{i-1} + Y_i, \varepsilon_i) \mid \mathcal{F}_0]| \le C\, \varepsilon_i^{-2} (\ln_+ d)\, \underline{\lambda}^2\, \beta$$
$$+ C\, \varepsilon_i^{-(2+\delta)} (\ln_+ d)^{1+\delta/2}\, \underline{\lambda}^{2+\delta} \gamma_{2+\delta},$$

$$\gamma_{2+\delta} := \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \Big(\mathbb{E}\big[\|X_i\|_\infty^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_0\big] + \bar{\sigma}_i^{2+\delta} (\ln_+ d)^{1+\delta/2} \Big)}{\underline{\lambda}^{2+\delta}},$$

$$\beta := \frac{1}{\underline{\lambda}^2} \max_{1 \le i \le n} \mathbb{E}\Big[\big\| \mathbb{E}\big[X_i X_i^T \mid \mathcal{F}_{i-1}\big] - \Sigma_i \big\|_{e,\infty} \,\Big|\, \mathcal{F}_0 \Big].$$

Теорема 1. *Пусть $\underline{\lambda} > 0$ п.н., Тогда существует универсальная константа $C > 0$ такая, что:*

$$d_K(S_n, T_n \mid \mathcal{F}_0) \le C (\ln_+ d)\, \beta\, \ln\!\left(1 + \frac{n \underline{\lambda}^2}{\varepsilon^2}\right) + C\, \frac{\varepsilon\, \ln_+ d}{\bar{\sigma}}.$$

Здесь $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,

$$\varepsilon_1 = (\ln_+ d)^{-1/4} (\bar{\sigma}\, \underline{\lambda}\, \gamma_1)^{1/2}, \qquad \varepsilon_2^{1+\delta} = \bar{\sigma}\, (\ln_+ d)^{\delta/2}\, \underline{\lambda}^{\delta}\, \gamma_{2+\delta}\, \ln\!\left(1 + \frac{n \underline{\lambda}^2}{\varepsilon_2^2}\right),$$

$$\gamma_1 := \frac{1}{\underline{\lambda}} \max_{1 \le i \le n} \Big(\mathbb{E}[\|X_i\|_\infty \mid \mathcal{F}_0] + \bar{\sigma}_i (\ln_+ d)^{1/2} \Big).$$

Литература

1. Kojevnikov D., Song K. A Berry–Esseen bound for vector-valued martingales // *arXiv:2011.00374*, 2020.
2. Fang X., Koike Y. High-dimensional central limit theorems by Stein's method // *The Annals of Applied Probability*. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 1660–1686.
3. Kuchibhotla K., Rinaldo A. High-dimensional CLT for sums of non-degenerate random vectors: $n^{1/2}$-rate // *arXiv:2009.13673*, 2020.