Анализ стохастической модели SEIR с миграцией и двумя центрами

Каратов Р. Б.

Студент

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

E-mail: rbkaratov@hse.ru

Научный руководитель *— Паламарчук Е. С.*

Аннотация. Проводится анализ асимптотического поведения решения стохастической билинейной системы, описывающей динамику популяций. Устанавливаются условия экспоненциальной сходимости к положению равновесия.

Ключевые слова: билинейная стохастическая система, устойчивость, SEIR модель

0.1 Введение

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ определён многомерный стохастический процесс

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^\top,$$

компоненты которого описывают численность индивидов в различных эпидемиологических или демографических компартментах. Динамика процесса учитывает как детерминированные механизмы перехода между группами (например, заражение, выздоровление, смертность), так и стохастические возмущения (см. [2], [4]), отражающие случайные внешние воздействия, а также миграционные потоки между пространственно разнесёнными популяциями.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, а также динамику численности частиц в разных группах:

$$
\begin{cases}
dS_i(t) = -\beta_i S_i(t)\dfrac{I_i(t)}{N_i(t)}dt - \sum\limits_{j\neq i} k_{ij}S_i(t)dt \\
\quad + \sum\limits_{j\neq i} k_{ji}S_j(t)dt + \sigma\dfrac{S_i(t)}{N_i(t)}(E_i(t)+I_i(t))dB(t) \\
dE_i(t) = -\beta_i S_i(t)\dfrac{I_i(t)}{N_i(t)}dt - \sum\limits_{j\neq i} k_{ij}E_i(t)dt \\
\quad + \sum\limits_{j\neq i} k_{ji}E_j(t)dt - \sigma\dfrac{S_i(t)}{N_i(t)}E_i(t)dB(t) \\
dI_i(t) = -\lambda E_i(t)dt - \gamma_i I_i(t)dt - \sum\limits_{j\neq i} l_{ij}E_i(t)dt & i=1,\dots,n \\
\quad + \sum\limits_{j\neq i} l_{ji}E_j(t)dt - \sigma\dfrac{S_i(t)}{N_i(t)}I_i(t)dB(t) \\
dR_i = \gamma_i I_i(t)dt - \sum\limits_{j\neq i} k_{ij}R_i(t)dt + \sum\limits_{j\neq i} k_{ji}R_j(t)dt \\
N_i(t) = S_i(t)+E_i(t)+I_i(t)+R_i(t) \\
S_i(0)=S_{i,0},\ E_i(0)=E_{i,0},\ I_i(0)=I_{i,0},\ R_i(0)=R_{i,0},
\end{cases}
$$

где $B(t)$ — стандартный одномерный винеровский процесс. Для простоты рассмотрим систему с 2 популяциями частиц — $n=2$. Для параметров модели предполагается, что $\beta_1,\beta_2>0$, $\lambda>0$, $k_{12}+k_{21}>0$, $l_{12}+l_{21}>0$, $\gamma_1,\gamma_2>0$, σ — некоторые константы.

Данная система СДУ является моделью для описания численности групп в модели математической биологии, относящейся к классу SEIR, состоящих из эпидемиологических групп 4 типов: S — подверженные заболеванию, E — зараженные в инкубационном периоде, I — заразные, R — переболевшие. Перемещение индивида между группами происходит следующим образом: $S\to E\to I\to R$. Помимо этого, изменение численности частиц в компартментах может осуществляться за счет миграции между разными популяциями.

Ставится задача анализа асимптотического поведения решения при $t\to\infty$, включая исследование устойчивости.

0.2 Основной результат

Лемма 1. *Пусть* $X(0)=(S_1(0),I_1(0),E_1(0),R_1(0),S_2(0),I_2(0),E_2(0),R_2(0))\in\mathbb{R}^8_+$, *тогда для системы* $X(t)=(S_1(t),I_1(t),E_1(t),R_1(t),S_2(t),I_2(t),E_2(t),R_2(t))$ *выполняется*

$\mathbb{P}\left\{\forall t \geq 0\ X(t) \in \mathbb{R}^8_+\right\} = 1.$

Лемма 2. *Для СДУ в условиях Леммы 1 имеют место сходимости $S_i(t) \to S_{i,\infty}$, $E_i(t) \to 0$, $I_i(t) \to 0$, $R_i(t) \to R_{i,\infty}$ почти наверное и в среднем порядка p при $t \to \infty$. При этом $k_{12}S_{1,\infty} = k_{21}S_{2,\infty}$, $k_{12}R_{1,\infty} = k_{21}R_{2,\infty}$.*

Для оценки скорости сходимости к стационарному состоянию введем матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -k_{12} - \lambda & k_{21} & \beta_1 & 0 \\ k_{12} & -k_{21} - \lambda & 0 & \beta_2 \\ \lambda & 0 & -l_{12} - \gamma_1 & l_{21} \\ 0 & \lambda & l_{12} & -l_{21} - \gamma_2 \end{pmatrix}$$

и также возмущенную матрицу $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A} + \dfrac{\sigma^2}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Определение 1 ([3])**.** *Процесс $X(t)$ называется экспоненциально устойчивым почти наверное, если существует константа $\kappa > 0$ такая, что*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|X(t)\| \leq -\kappa$$

почти наверное.

Теорема 1. *Пусть $X(t) = (E_1(t)\, E_2(t)\, I_1(t)\, I_2(t))^\top$, если $\mathcal{A}_\sigma$ экспоненциально устойчива, то процесс $X(t)$ экспоненциально устойчив почти наверное с темпом*

$$\kappa = \frac{\mu_{\min}\left[(-\mathcal{A}_\sigma)^\top D + D(-\mathcal{A}_\sigma)\right]}{\mu_{\max}[D]},$$

где D — диагональная матрица с элементами главной диагонали вида $d_{ii} = z_i/y_i$, $i = 1, \dots, 4$, вектора $y = (-\mathcal{A}_\sigma)^{-1}\mathbf{1}_4$, $z = (-\mathcal{A}_\sigma)^{-\top}\mathbf{1}_4$, $\mathbf{1}_4 = (1\,1\,1\,1)^\top$.

Доказательство основано на применении функции Ляпунова вида $V(x) = x^\top Dx$ и свойств матрицы $\mathcal{A}_\sigma$, элементы которой вне главной диагонали являются неотрицательными. Отметим, что условия устойчивости также могут быть сформулированы в терминах индекса репродукции $\mathcal{R}_0$: $\mathcal{R}_0 < 1$, где $\mathcal{R}_0$ — максимальное собственное значение вспомогательной матрицы меньшей размерности, см. [1].

Литература

1. *Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., Roberts M.G.* The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models // Journal of the Royal Society Interface. 2010. V. 7. No. 47. P. 873–885.
2. *Zhang Y., Li Y.* Evolutionary dynamics of stochastic SEIR models with migration and human awareness in complex networks // Complexity. 2020. No. 1. P. 3768083.
3. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. Elsevier, 2007.
4. *Zhou Y., Zhang W., Yuan S.* Survival and stationary distribution of a SIR epidemic model with stochastic perturbations // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 244. P. 118–131.