Рассмотрим классическую задачу математической статистики: пусть вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$ имеет мультиномиальное распределение $M_3(n, \boldsymbol{\pi})$, то есть

$$\mathbb{P}\left(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, Y_3 = n_3\right) = \begin{cases} n! \prod\limits_{j=1}^{3} \left(\pi_j^{n_j} / n_j!\right), & n_j = \overline{0, n},\ \sum_{j=1}^{3} n_j = n \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^\top$, $\pi_j > 0$, $\sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1$, и считается выполненной нулевая гипотеза $H_0 : \ \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}$. Основным объектом исследования в работе является семейство статистик, построенное на базе фи-дивергенций

$$T_\varphi = \frac{2n}{\varphi''(1)} \cdot \sum_{j=1}^{3} p_j \varphi\left(\frac{Y_j}{np_j}\right),$$

где φ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что

- $\varphi(u) \geqslant 0 \quad \forall u > 0$;
- $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$;
- $\varphi''(1) > 0$.

Известно, что при $n \to \infty$ распределение данной статистики сходится к распределению хи-квадрат с двумя степенями свободы, однако при проверке гипотез важно понимать, насколько велика ошибка аппроксимации реального распределения предельным. В данной работе задача состоит в исследовании точности приближения хи-квадрат распределением для $\mathbb{P}(T_\varphi(\mathbf{Y}) < c)$, где $c > 0$. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in C^4(\mathbb{R}_{++})$. Тогда $\forall c > 0$*

$$\mathbb{P}\left(T_\varphi < c\right) = \mathbb{P}\left(\chi_2^2 < c\right) + O_{c,\varphi,\mathbf{p}}\left(n^{-285/416} (\log n)^{17373/8320}\right).$$

Литература

1. Asylbekov Zh. A., Zubov V. N., Ulyanov V. V. On approximating some statistics of goodness-of-fit tests in the case of three-dimensional discrete data // Siberian mathematical journal. 2011. Vol. 52. N 4. P. 571–584.

2. Hardy Gr. H. On Dirichlet's divisor problem // Proceedings of the London Mathematical Society. 1917. Vol. 2. N 1. P. 1–25.
3. Huxley M. N. Exponential sums and lattice points III // Proceedings of the London Mathematical Society. 2003. Vol. 87. N 3. P. 591–609.
4. Taneichi N., Sekiya Y., Suzukawa A. An asymptotic approximation for the distribution of φ-divergence multinomial goodness-of-fit statistic under local alternatives // Journal of the Japan Statistical Society. 2001. Vol. 31. N 2. P. 207–224.
5. Yarnold J. K. Asymptotic approximations for the probability that a sum of lattice random vectors lies in a convex set // The Annals of Mathematical Statistics. 1972. Vol. 43. N 5. P. 1566—1580.