Асимптотический анализ страховых резервов при случайном числе клиентов: экстремальные и средние характеристики

Арифуллин Артур Исхакович

студент 6 курса

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: artur.arifullin@ya.ru

Научный руководитель *— Бенинг Владимир Евгеньевич, профессор, д-р физ.-мат. наук*

Модель. Рассматривается портфель с независимыми одинаково распределёнными выплатами $X_1, X_2, \dots$ и случайным числом клиентов N_n, где N_n независимо от $\{X_i\}$ и $\mathbb{E}N_n = n \to \infty$. Изучаются две характеристики резерва: *экстремальная* — α-резерв максимальной выплаты $c_\alpha(n) = \inf\{x\colon \mathbb{P}(M_{N_n} \le x) \ge 1-\alpha\}$, и *средняя* — функционал $\mathbb{E}g(\overline{X}_{N_n})$, где g — функция полезности страховщика.

Экстремальная характеристика. Для выплат с распределением Бёрра $F(x) = 1-(1+x^r)^{-\gamma}$ и нормированного максимума $S_n = n^{-1/(r\gamma)}X_{(n)}$ при разложениях отрицательных моментов $\mathbb{E}N_n^{-j} = a_j n^{-j} + o(n^{-2})$ получено [3]:

$$c_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{u_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}), \quad l(\alpha) = -\log(1-\alpha),$$

где коэффициент u_2 зависит от a_1 и тем самым от конкретной частотной модели, тогда как v_α и v_1 универсальны.

Средняя характеристика. При стандартных моментных условиях на X_1 и гладкости g [1]:

$$\mathbb{E}g(\overline{X}_{N_n}) = g(\mu) + \frac{g''(\mu)\sigma^2}{2n} + \frac{1}{6n^2}\Big(b_2^* g^{(3)}\mu_3 + \tfrac{3b_2^*\sigma^4}{4} g^{(4)} + 3a_2^* g''\sigma^2\Big) + o(n^{-2}).$$

Влияние частотной модели также проявляется лишь во втором порядке.

Асимптотический дефект. Дефект [2] — число клиентов, на которое нужно увеличить фиксированный портфель размера n, чтобы его характеристика совпала с характеристикой портфеля со случайным N_n. По формуле Ходжеса–Лемана при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$:

$$d_{\mathrm{ext}} = \frac{k}{\gamma^2}\, l(\alpha)^{(\gamma-1)/(r\gamma)}, \qquad \bar{d} = k.$$

Модель N_n	d_{ext}	$\bar{d}$
Нуль-усеч. отриц. биномиальное	$\dfrac{1-1/m}{\gamma^2}\, l^{(\gamma-1)/(r\gamma)}$	$1-\dfrac{1}{m}$
Нуль-усеч. Пуассона	$\dfrac{1}{\gamma^2}\, l^{(\gamma-1)/(r\gamma)}$	1
Нуль-усеч. Делапорта	$\dfrac{1}{\gamma^2}\, l^{(\gamma-1)/(r\gamma)}$	1
Обобщённое Пуассона	$\dfrac{1}{(1-\theta)^2\gamma^2}\, l^{(\gamma-1)/(r\gamma)}$	$\dfrac{1}{(1-\theta)^2}$

Литература

1. Бенинг В. Е. Об асимптотическом поведении среднего суммарного резерва страховой компании в случае случайного числа клиентов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2003. № 2. С. 3–10.
2. Hodges J. L., Lehmann E. L. Deficiency // Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41. P. 783–801.
3. Бенинг В. Е. О применении распределения Бёрра к асимптотическому исследованию поведения резерва страховой компании // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2002. № 4. С. 20–28.