Экспоненциальные модели случайных графов (ERGM) являются одним из основных инструментов статистического анализа сложных сетей в социологии и биологии. Однако классические спецификации ERGM сталкиваются с проблемой вырожденности: в термодинамическом пределе распределение графов концентрируется на тривиальных конфигурациях (полный или пустой граф), не воспроизводящей наблюдаемую в реальности кластерную структуру. В данной работе исследуется регуляризованная модель, в которой проблема вырожденности решается за счет введения конкурирующих взаимодействий.

Рассматривается ансамбль графов на N вершинах с гамильтонианом, включающим притягивающее взаимодействие через треугольники (K_3) и отталкивающее взаимодействие через пути длины 3 (P_4):

$$H_N(G) = -\frac{\eta_2}{N} N(K_3) + \frac{\eta_3}{N^2} N(P_4),$$

где $\eta_2 > 0$ — параметр кластеризации, а $\eta_3 > 0$ — параметр стабилизации.

Для анализа асимптотического поведения системы при $N \to \infty$ применяется формализм предельных графонов и принцип больших уклонений. Согласно теореме Чаттерджи-Диакониса [1], плотность свободной энергии системы определяется решением вариационной задачи на пространстве графонов.

В работе доказано, что введение члена P_4 стабилизирует фазу, соответствующую стохастической блочной модели. Аналитически выведены условия возникновения фазового перехода первого рода между фазой случайного графа Эрдёша-Реньи и упорядоченной многокластерной фазой. Получено критическое соотношение параметров, при котором происходит скачкообразное изменение параметра порядка (плотности треугольников).

Для верификации теоретических результатов разработан алгоритм моделирования на основе Марковских цепей Монте-Карло. Численные эксперименты подтверждают наличие гистерезиса вблизи критической точки, что характерно для фазовых переходов первого рода. Предложенная модель позволяет генерировать устойчивые сети с модульной структурой, избегая коллапса в полный граф.

Список литературы

[1] Chatterjee S., Diaconis P. Estimating and understanding exponential random graph models // The Annals of Statistics. 2013. Vol. 41, No. 5. P. 2428–2461.

[2] Lovász L. Large networks and graph limits. American Mathematical Society, 2012.

[3] Newman M. E. J. Networks: An Introduction. Oxford University Press, 2010.

[4] Radin C., Yin M. Phase transitions in exponential random graphs // The Annals of Applied Probability. 2013. Vol. 23, No. 6. P. 2458–2471.