Эргодические свойства стохастической модели децентрализованной автономной организации

Гординский Дмитрий Михайлович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: gordsdima@gmail.com

***Научный руководитель** — Колокольцов Василий Никитич*

Децентрализованные автономные организации (DAO) — новый класс экономических агентов, управление которыми реализуется через смарт-контракты и токен-голосование. В работе предложена оригинальная стохастическая динамическая модель DAO в виде системы шести СДУ:

$$dY(t) = \mu(Y(t))\,dt + \Sigma(Y(t))\,dW(t), \tag{1}$$

где $W(t)$ — шестимерный винеровский процесс, а вектор состояния $Y(t) = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, V)^\top \in \mathcal{S}$ включает: индекс децентрализации $X_1 \in [0, \log N]$, активность управления X_2, долгосрочную вовлечённость X_3, долю спекулянтов X_4 (все три в $[0,1]$), цену токена $X_5 > 0$ и волатильность $V > 0$.

Каждая компонента вектора дрейфа $\mu(Y)$ получена из микроэкономических первопринципов и имеет вид:

$$\mu_1 = \kappa_1\left(\frac{X_1^{\max}}{1+e^{-\lambda_1 \mathrm{Score}_1(X)}} - X_1\right), \tag{2}$$

$$\mu_2 = \kappa_2\left(\frac{1}{1+e^{-B_{\mathrm{net}}(X)/k_{\mathrm{sens}}}} - X_2\right), \tag{3}$$

$$\mu_3 = \kappa_3\left(\frac{1}{1+e^{-\mathrm{Score}_{\mathrm{belief}}(X,V)}} - X_3\right), \tag{4}$$

$$\mu_4 = \kappa_4(\Phi(\mathrm{Score}_{\mathrm{spec}}(X,V)) - X_4)\,, \tag{5}$$

$$\mu_5 = X_5\left[\kappa_{\mathrm{price}}\left(\frac{V_{\mathrm{fund}}(X)}{X_5} - 1\right) + \varphi_{\mathrm{spec}}(X_4 - X_4^{\mathrm{avg}}) + r\right], \tag{6}$$

$$\mu_V = \kappa_V(\theta_V - V), \tag{7}$$

где $\mathrm{Score}_1(X) = \beta_{12}X_2 + \beta_{15}\log(X_5/X_5^{\mathrm{ref}}) - \lambda_1^{-1}(X_1 - X_1^{\mathrm{crit}})$, $B_{\mathrm{net}}(X) = \beta_{\mathrm{val}}X_5C_{\mathrm{piv}}/\sqrt{e^{X_1}}e^{-\alpha_{\mathrm{vol}}V} - (c_0 + c_4X_4 - c_3X_3)$, $\mathrm{Score}_{\mathrm{belief}}(X,V) = \beta_{13}X_1 + \beta_{32}X_2 + \beta_{35}\mathrm{Sharpe}(X,V) - \delta\cdot\min(t-t_0, T_{\max})$, $\mathrm{Score}_{\mathrm{spec}}(X,V) =$

$\mathrm{Sharpe}(X,V) - TC - \gamma_{42}X_2 - \gamma_{43}X_3$, $\mathrm{Sharpe}(X,V) = (\mu_5(X)/X_5 - r)/\sqrt{V}$, $V_{\mathrm{fund}}(X) = V_0 e^{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3}$. Матрица диффузии $\Sigma(Y)$ диагональна с коэффициентами $\sigma_1\sqrt{X_1(\log N - X_1)}$, $\sigma_i\sqrt{X_i(1-X_i)}$ $(i=2,3,4)$, $X_5\sqrt{V}$, $\sigma_V\sqrt{V}$.

Все шесть компонент дрейфа (2)–(7) введены впервые; их совокупность образует связную нелинейную систему, захватывающую обратные связи между структурой управления, поведением держателей и рыночной динамикой.

Для системы (1) при условии Феллера $2\kappa_V\theta_V \geq \sigma_V^2$ и условии $\kappa_{\mathrm{price}} > r + \varphi_{\mathrm{spec}}$ построена функция Ляпунова $\mathcal{V}(Y) = 1 + a_5(X_5 - \log X_5) + a_V(V - \log V)$, для которой выполнено неравенство Фостера–Ляпунова $\mathcal{A}\mathcal{V} \leq -c_0\mathcal{V} + b$ [2]. Это влечёт существование единственного сильного решения, траектории которого п.н. остаются в $\mathcal{S}$. Строгая эллиптичность $\Sigma\Sigma^\top$ на компактах в $\mathrm{int}\,\mathcal{S}$ обеспечивает неприводимость марковского процесса $Y(t)$. Совокупность этих свойств, по [2, гл. 4], означает, что процесс $Y(t)$ обладает единственной инвариантной вероятностной мерой π на $\mathcal{S}$, к которой переходные вероятности сходятся в метрике полной вариации при $t \to \infty$, а временные средние любой π-интегрируемой наблюдаемой сходятся к её стационарному среднему п.н. Последнее свойство является теоретическим основанием для эмпирической верификации модели. Численное исследование и анализ реальных данных составляют предмет дальнейшей работы.

Литература

1. Granovetter M. Threshold models of collective behavior // American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83, No. 6. P. 1420–1443.
2. Khasminskii R. Z. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. Springer, Heidelberg, 2012.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Наукова думка, 1975.