Случайные блуждания на графах играют важную роль в теории вероятностей и находят многочисленные приложения в задачах распространения информации, динамики взаимодействующих частиц и анализа консенсусных процессов на сетях. Одной из ключевых характеристик таких систем является время встречи независимых блужданий, которое тесно связано с временами коалесценции и консенсуса.

В данной работе исследуется время встречи двух независимых непрерывновременных случайных блужданий на случайных неориентированных графах. Основное внимание уделяется случаю случайных d-регулярных графов. Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ — случайный d-регулярный граф на n вершинах, где $d \geq 3$ фиксировано. На графе рассматриваются два независимых случайных блуждания $(X_t)_{t\geq 0}$ и $(Y_t)_{t\geq 0}$, стартующие из стационарного распределения. Время встречи определяется как

$$T_{\mathrm{meet}} = \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\}.$$

Основной результат описывает асимптотическое поведение времени встречи при $n \to \infty$. Показано, что математическое ожидание времени встречи имеет линейный порядок роста:

$$\mathbf{E}T_{\mathrm{meet}} = \frac{d-1}{2(d-2)}\, n(1 + o(1)).$$

Кроме того, после нормировки на математическое ожидание распределение времени встречи сходится к стандартному экспоненциальному закону:

$$\frac{T_{\mathrm{meet}}}{\mathbf{E}T_{\mathrm{meet}}} \Rightarrow \mathrm{Exp}(1).$$

Доказательство основано на использовании геометрических свойств случайных регулярных графов и быстрых свойств перемешивания случайного блуждания. Существенную роль играет тот факт, что локальная структура случайного регулярного графа с высокой вероятностью совпадает с бесконечным d-регулярным деревом. Это позволяет провести локальный анализ взаимодействия двух блужданий и вычислить точную константу в асимптотике среднего времени встречи.

Полученные результаты дают строгую асимптотику для времени встречи и могут быть использованы при исследовании времени коалесценции случайных блужданий и времени достижения консенсуса в стохастических моделях на случайных графах.

Список литературы

[1] Aldous D., Fill J. Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs. 2002.

[2] Levin D., Peres Y., Wilmer E. Markov Chains and Mixing Times. American Mathematical Society, 2009.

[3] Avena L., den Hollander F., Oliveira R. Meeting times of random walks on random graphs.