

**О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ
САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММ**

Шешин Антон Дмитриевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: s02220291@mc.msu.ru

Научный руководитель — *Ульянов Владимир Васильевич*

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с нулевым средним, и обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad V_n^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2, \quad \bar{\xi} = \frac{S_n}{n}, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

В последние годы наблюдается возрастающий интерес к изучению предельного поведения так называемой самонормированной суммы S_n/V_n . Одной из причин этого интереса является прямая связь S_n/V_n с классической t -статистикой Стьюдента $t_n = S_n/\sqrt{n}\sigma_n$:

$$t_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{S_n/V_n}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} \cdot (S_n/V_n)^2}}. \quad (1)$$

В работе [4] получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, удовлетворяющих условиям $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = 1$, $\mathbb{E}\xi_1^4 < \infty$. Пусть также $\theta \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор коэффициентов, равномерно распределённый на единичной сфере S^{n-1} . Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$ с вероятностью не менее чем $1 - \delta$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\substack{a, b \in \mathbb{R}, \\ a < b}} \left| \mathbb{P} \left(a \leq \sum_{i=1}^n \theta_i \xi_i \leq b \mid \theta \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \right| \leq \frac{C_{KS} \mathbb{E}\xi_1^4 \ln^2(1/\delta)}{n}, \quad (2)$$

где C_{KS} — абсолютная константа.

Этот результат значительно улучшает классическую оценку

Берри-Эссеена, обеспечивающую сходимость суммы независимых случайных величин к стандартному гауссовскому распределению со скоростью $O(1/\sqrt{n})$. Дальнейшее изучение подобной рандомизации в предельных теоремах представлено, в частности, в работах [1], [3].

Цель настоящего доклада заключается в получении аналогичного рандомизированного результата с оценкой скорости сходимости для самонормированной суммы, то есть статистики вида

$$T_n^\theta = \frac{\theta_1 \xi_1 + \dots + \theta_n \xi_n}{\sqrt{\theta_1^2 \xi_1^2 + \dots + \theta_n^2 \xi_n^2}}. \quad (3)$$

В рамках сообщения будут представлены промежуточные результаты и вспомогательные леммы, которые позволяют продвинуться к доказательству указанной оценки. Обсуждается общий подход к решению задачи, основанный на работах [2], [4], а также технические трудности, возникающие при его реализации.

Литература

1. Ayvazyan S. A., Ulyanov V. V. A multivariate CLT for weighted sums with rate of convergence of order $O(1/n)$ // Foundations of Modern Statistics, Springer International Publishing, 2019. С. 225-257.
2. Bloznelis M., Putter H. Second-order and bootstrap approximation to Student's t-statistic // Theory of Probability & Its Applications, 2003. № 2. Т. 47. С. 300-307.
3. Puchkin N., Ulyanov V. Inference via randomized test statistics // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilites et statistique, Institut Henri Poincaré, 2023. № 3. Т. 59. С. 1508-1529.
4. Klartag B., Sodin S. Variations on the Berry–Esseen theorem // Theory of Probability & Its Applications, 2012. № 3. Т. 56. С. 403-419.