Численное решение нелокального стационарного уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера на окружности

Андрианов Владислав Дмитриевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: andrianovvd@inbox.ru

***Научный руководитель** — Давыдов Алексей Александрович*

Модели динамики возобновляемых ресурсов широко применяются в задачах рационального природопользования и управления промысловыми популяциями. Одной из базовых является модель Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера (КПП-Фишера) [1, 2]. Она позволяет учитывать диффузию, воспроизводство и внутривидовую конкуренцию. В работе [3] рассматривается обобщение этой модели: коэффициенты уравнения зависят от суммарного объёма ресурса во всей области, что делает уравнение нелокальным. Такая постановка естественна, когда общая плотность популяции влияет на интенсивность конкуренции и состояние кормовой базы.

Рассматривается ресурс, распределённый на окружности, динамика которого описывается уравнением КПП-Фишера с коэффициентами, зависящими от общего объёма ресурса:

$$p_t = \Delta p + \big[a(x,E) - u(x)\big]p - b(x,E)\,p^2, \quad x \in \mathbb{S}^1, \tag{1}$$

где $\Delta = d^2/dx^2$ — оператор Лапласа, $u(x) \geq 0$ — управление (интенсивность изъятия), $E = \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\,p(x,t)\,dx$ — суммарный объём ресурса с положительным весом f. Функции a (скорость воспроизводства) и b (конкуренция) монотонно зависят от E: при росте E функция a не возрастает, а b — не убывает и остаётся отделённой от нуля.

В работе [3] при непрерывных и липшицевых по E функциях a и b доказаны единственность нетривиального неотрицательного стационарного решения уравнения (1) (при $E = 0$ таковое имеется согласно [4]), а также существование допустимого управления $u^*(x)$, максимизирующего средний временной сбор ресурса.

Настоящая работа посвящена численной верификации теоретических результатов из [3] для случая окружности. Реализован алгоритм, который дискретизует уравнение (1) конечными разностями второго порядка на равномерной сетке с периодическими граничными условиями и решает нелинейную систему методом Ньютона. Программа допускает свободный выбор профиля управления $u(x)$, а также замену функций a, b и веса f, что позволяет исследовать широкий класс моделей.

Численно подтверждена единственность стационарного решения, доказанная в [3]: при различных начальных приближениях метод сходится к одному и тому же распределению $p^*(x)$. Проверена устойчивость алгоритма: возмущение начального приближения не влияет на результат. Установлен эмпирический порядок сходимости схемы $O(h^2)$, согласующийся со вторым порядком аппроксимации. Построены стационарные распределения для ряда пространственно неоднородных профилей управления u и исследована зависимость стационарного решения от формы управления.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А: Математика и механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1–26.
2. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics. 1937. Vol. 7, no. 4. P. 353–369.
3. Давыдов А. А., Платов А. С., Туницкий Д. В. Существование оптимального стационарного решения в КПП-модели при нелокальной конкуренции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 113–121.
4. Berestycki H., Hamel F., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I — Influence of periodic heterogeneous environment on species persistence // J. Math. Biol. 2005. Vol. 51. P. 75–113.