В статье [1] представлена нелинейная модель межотраслевого баланса с производственными функциями, обладающими свойством постоянной эластичности замещения $\widetilde{\rho}_j$ производственных факторов (Constant Elasticity Substitution). Для применения модели требуется описать численный метод решения следующей системы нелинейных взаимосвязанных уравнений, единое решение которой определяет вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_m) \in [p_{min}, p_{max}]^m$, $p_{min} > 0$ при фиксированном векторе эластичностей $\widetilde{\rho} = (\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_m) \in [-M, M]^m$, $M > 0$:

$$p_j = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} (p_i)^{1-e^{-\widetilde{\rho}_j}} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj} (s_k)^{1-e^{-\widetilde{\rho}_j}} \right)^{\frac{e^{\widetilde{\rho}_j}}{e^{\widetilde{\rho}_j}-1}}}_{F_j(p, \widetilde{\rho}_j)}, \; j = \overline{1, m}.$$

Матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $B = (b_{kj}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ определяются по данным за базовый год и считаются известными. Разрешается сгладить систему по параметру $\widetilde{\rho}$, чтобы найденное решение $p(\widetilde{\rho})$ имело Липшицевый по параметру градиент $\frac{dp}{d\widetilde{\rho}}$.
Задача нахождения решения $p \in [p_{min}, p_{max}]^m$ при $\forall\, \widetilde{\rho} \in [-M, M]^m$ переписывается в оптимизационной постановке:

$$J(p) := \tfrac{1}{2} \cdot ||G(p, \widetilde{\rho})||_2^2 \to \inf, \text{ для } G(p, \widetilde{\rho}) = \big(G_1(p, \widetilde{\rho}_1), \ldots, G_m(p, \widetilde{\rho}_m)\big),$$

$$\text{где } G_j(p, \widetilde{\rho}_j) := F_j(p, \widetilde{\rho}_j) - p_j.$$

Негладкость правой части системы по $\widetilde{\rho}$ не позволяет использовать теорему о системе неявных функций без явной модификации модели, поэтому в работе было проведено сглаживание системы ($\widetilde{G}_j \underset{\varepsilon_1 \to 0}{\to} G_j$) специальной quintic smoothstep-функцией $\psi(\widetilde{\rho}_j)$ с регулирующими темпы сглаживания параметрами $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$:

$$\widetilde{G}_j(p, \widetilde{\rho}_j) = \begin{cases} G_j(p, \varepsilon_1), & |\widetilde{\rho}_j| \leq \varepsilon_1, \\ (1 - \psi(\widetilde{\rho}_j)) \cdot G_j(p, \varepsilon_1) + \psi(\widetilde{\rho}_j) \cdot G_j(p, \widetilde{\rho}), & \text{иначе}, \\ G_j(p, \widetilde{\rho}_j), & |\widetilde{\rho}_j| \geq \varepsilon_2, \end{cases}$$

где функция $\psi(\widetilde{\rho}_j) \in C^2$ определяется, как:

$$\psi(\widetilde{\rho}_j) = \begin{cases} 0, & |\widetilde{\rho}_j| \leq \varepsilon_1, \\ s\big(\frac{|\widetilde{\rho}_j| - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\big), & \text{иначе}, \\ 1, & |\widetilde{\rho}_j| \geq \varepsilon_2, \end{cases} \quad s(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 6x^5 - 15x^4 + 10x^3, x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

В работе показана справедливость утверждения о невырожденности якобиана $\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p}$ с использованием теоремы Леви-Десипланка, а также существование и единственность решения сглаженной системы, из чего следует и отсутствие других стационарных точек задачи оптимизации в силу:

$$J'(p) = \left(\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p}\right)^T \cdot \widetilde{G} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{G}(p, \widetilde{\rho}) = 0, \text{ где } \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \widetilde{G}_m}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widetilde{G}_m}{\partial p_m} \end{bmatrix}.$$

Липшицевость градиентов $\frac{dJ}{dp}$ и $\frac{dp}{d\widetilde{\rho}}$ обеспечена разумным ограничением p и $\widetilde{\rho}$ в классе выпуклых компактов. Такое свойство градиента позволяет исследовать произвольные гладкие функции от цен p и находить их чувствительности к $\widetilde{\rho}$ по цепному правилу с вычислением внутренней производной по правилу:

$$\frac{dp}{d\widetilde{\rho}} = -\left(\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \widetilde{\rho}}.$$

Это позволит, в дальнейшем, решить задачу идентификации $\widetilde{\rho}$ по имеющимся статистическим данным.

Литература

1. Kerimkhulle S., Obrosova N., Shananin A., Azieva G. The Nonlinear Model of Intersectoral Linkages of Kazakhstan for Macroeconomic Decision-Making Processes in Sustainable Supply Chain Management. *Sustainability, Bazel, Switzerland.* **2022**, Volume 14, №21, p. 14375.