

**ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО  
ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА  
АМПЛИТУДУ И СКОРОСТЬ ВОЗМУЩЕНИЯ**

*Петров Михаил Михайлович*

*Аспирант*

*Факультет космических исследований МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва,  
Россия*

*E-mail: mikh.petrov@bk.ru*

**Научный руководитель — Бугров Дмитрий Игоревич**

В работе рассматривается экстремальная задача параметрического возбуждения математического маятника при наличии фазовых ограничений на управление — ограничений как на амплитуду, так и на скорость изменения возмущения.

Исследуется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(1 + v(t))x_1, \end{cases}$$

при начальных условиях  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ , где управление удовлетворяет ограничениям  $|v(t)| \leq \mu < 1$ ,  $|\dot{v}(t)| \leq \eta$ .

Целью является минимизация значения  $x_1(t_k)$  в первый момент времени  $t_k$ , когда выполняется условие  $x_2(t_k) = 0$ .

В качестве допустимого класса рассматривается однопараметрическое семейство кусочно гладких управлений (см. Рис. 1), задаваемых линейными участками, где параметром служит момент  $t^*$ , в который управление проходит через нуль.

Решение системы на каждом участке управления получено аналитически. На линейных участках после замены переменных система сводится к уравнению Эйри, решения которого выражаются через специальные функции Эйри  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$ . На участках постоянного управления система описывается гармоническим осциллятором. Склеивание решений по непрерывности приводит к неявному трансцендентному уравнению  $F(t^*, t_k) = 0$ , связывающему момент нулевой скорости  $t_k$  и параметр  $t^*$ .

Поскольку аналитическое выражение для зависимости  $t_k(t^*)$  получить невозможно, экстремальное значение параметра находится численно. В классической задаче без ограничения на производную экстремальное управление, найденное по принципу максимума Понтрягина, имеет вид  $v_0(t) = -\mu \operatorname{sign}(x\dot{x})[1]$ .

Принципиально важный результат состоит в том, что оптимальный момент переключения  $t_0^*$  не совпадает с моментом изменения знака координаты  $x_1(t)$ , в отличие от классического решения без фазовых ограничений. Показано также, что при  $\eta \rightarrow \infty$  решение с ограничением по производной стремится к классическому закону управления.

Работа демонстрирует, как фазовые ограничения существенно изменяют структуру экстремального управления и момент переключения, а также даёт аналитико-численный метод решения подобных задач параметрического возбуждения. Такой подход может оказаться полезным, при моделировании физических воздействий с инерционностью (температурные/калорические воздействия [2]), когда мгновенные скачки параметра невозможны.

### Иллюстрации

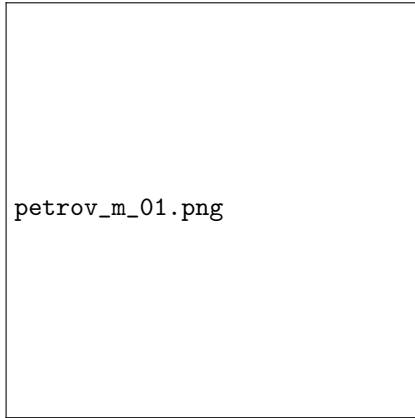


Рис. 1. Закон управления  $v(t)$

### Литература

1. Александров В. В., Жермоленко В. Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1972. № 5, 102-108.
2. Бугров Д. И., Петров М. М. Параметрическое возбуждение в модели афферентного первичного нейрона // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2025. № 3, 83-86.