Задача покрытия компактного множества кругами с фиксированными центрами

Карпычев Александр Витальевич

Аспирант

факультет ФСУиР НИУ ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: sokolovaxe@gmail.com

***Научный руководитель** — Кочевадов Виталий Алексеевич*

Покрытие различных областей набором кругов представляет собой обобщенную задачу, частные вариации или подзадачи которые имеют важные и прикладные значения в радиофизике, энергетике, логистике, экономике и других областях [1, 2, 3]. Актуальность таких подзадач в первую очередь обусловлена технической и экономической спецификой сферы приложения, так, например, в сфере энергетики наибольшую актуальность имеют задачи управления и планирования, которые учитывают особенности эксплуатируемого оборудования, а также национальные интересы по обеспечению и удовлетворению потребностей населения, проживающего в границах определенной локации. В работе рассматривается постановка задачи управления зонами влияния (ответственности) электростанций обеспечивающих электроэнергией население, которое равномерно распределено в границах некоторого территориального субъекта или области, которую обозначим за $\mathcal{M}$. В постановке задачи будем придерживаться предположения, что указанная область является компактным множеством, то есть $\mathcal{M} = \operatorname{Comp}\mathbb{R}^2$.

Пусть $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\} : n \geqslant 2$, – множество электростанций. Положение электростанции $i \in \mathcal{N}$ задано точкой $s_i \in \mathbb{R}^2$, которая может как принадлежать области $\mathcal{M}$, так и находится вне границ этой области. Будем говорить, что координаты расположения электростанции i определяют центр зоны ее влияния на множестве $\mathcal{M}$. Саму зону влияния электростанции i определим кругом с центром в точке s_i и радиусом вида $R_i = r_i + \Delta r_i$, где $r_i > 0$ – заданный начальный радиус влияния, а $\Delta r_i \geqslant 0$ – положительное приращение, которое можно интерпретировать как дополнительное расширение зоны влияния электростанции i.

Для каждой точки $\mathbf{s}_i$ определим круг радиуса R_i:

$$O(\mathbf{s}_i, R_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq R_i\}.$$

Тогда требуется определить вектор положительных приращений радиусов $\mathbf{r}^* = \{\Delta r_i\}_{i=1}^n : \Delta r_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, чтобы выполнялось условие полного покрытия

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O(\mathbf{s}_i, R_i), \tag{1}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta r_i \to \min .$$

Для решения данной задачи предлагается метод, основанный на разбиении компактного множества $\mathcal{M}$ на зоны Дирихле относительно фиксированных центров $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$. В методе применяются геометрические свойства зон Дирихле, а также определение точек пересечения различных зон влияния между собой с целью устранения избыточности покрытия. Это позволяет построить итеративный алгоритм с полиномиальной вычислительной сложностью, который находит допустимое решение и обеспечивает его близость к глобальному оптимуму.

В отличие от существующих метаэвристических алгоритмов и методов дискретизации области, предлагаемый метод не требует задания расчётной сетки или параметризации пространства поиска, что снижает вычислительные затраты при работе с областями сложной формы. Полученный метод может быть использован как для теоретико-игрового моделирования взаимодействия агентов в энергетической системе, так и для решения прикладных оптимизационных задач минимизации суммарных издержек при планировании зон ответственности электростанций.

Литература

1. Лебедев П. Д., Стойчин К. Л. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур наборами кругов линейно различающихся радиусов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 35–50.
2. Khachay M., Poberii M. Complexity and approximation for the circle covering problem // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2009. Vol. 48, No. 6. P. 908–918.
3. Wang,B. Coverage Problems in Sensor Networks: A Survey // ACM Computing Surveys. 2011., №,4. P.,1–53.