Теоремы типа Мореры и Дзядыка для тупоугольного равнобедренного треугольника

Власенко Илона Сергеевна

Аспирант

Факультет математики и информационных технологий ДонГУ, Донецк, Россия

E-mail: `ilonavlaskina02@yandex.ru`

***Научный руководитель** — Волчков Валерий Владимирович*

Пусть M — группа евклидовых движений комплексной плоскости $\mathbb{C}$, A — жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей ∂A, $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. В работе [5] К.А.Беренстейн и Р.Гэй получили уточнение классической теоремы Мореры.

Теорема. Пусть $A \subseteq B_r$ — фиксированный треугольник, $R \geqslant 2r$ и $f \in C(B_R)$. Тогда f является голоморфной в B_R тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial(\sigma A)} f(z)dz = 0 \ \forall \sigma \in M : \sigma A \subseteq B_R. \tag{1}$$

Методы, разработанные в [5], позволяют получить аналогичные утверждения и для некоторых других областей A. В связи с этими результатами возникает следующая задача: найти наименьшее значение $R = R(A)$ такое, что для любой функции $f \in C(B_R)$ из условия (1) следует голоморфность f.

В такой общей постановке эта задача является весьма трудной (например, утверждение о том, что $R(A) < \infty$ для областей A, отличных от круга, эквивалентно локальному варианту старой гипотезы Шиффера об описании плоских множеств Помпейю [1]). В настоящее время точное значение $R(A)$ известно в следующих случаях:

1) A — квадрат со стороной a, при этом $R(A) = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ [2];

2) A — полукруг диаметра a, при этом $R(A) = \frac{a\sqrt{5}}{4}$ [3];

3) A — правильный треугольник со стороной a, при этом $R(A) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ [1];

а также для некоторых других множеств A (см. [6]).

В данной работе в явном виде получено решение поставленной задачи в случае, когда $A = T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \cos\beta, -x\mathrm{tg}\beta \leqslant y \leqslant x\mathrm{tg}\beta, \beta = \frac{\pi}{3}\}$ — равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 1 и углом между ними $2\pi/3$. Метод, используемый при доказательстве теоремы 1, дает возможность существенно усилить известную теорему В. К. Дзядыка [4] о геометрическом описании голоморфных функций (см. теорему 2).

Следующий результат является теоремой типа Мореры.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(B_R)$ *и выполнено условие 1 для* $A = T$. *Тогда верны утверждения:*

1. Если $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, *то* f *голоморфна в* B_R.

2. Если $\sqrt{3}/2 < R < \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, *то существуют неголоморфные бесконечно дифференцируемые функции в* B_R *с условием 1.*

Получено одно из уточнений теоремы Дзядыка.

Теорема 2. *Пусть* $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, *действительнозначные функции* $u, v \in C(B_R)$. *Тогда для того, чтобы одна из функций* $u+iv$ *или* $u-iv$ *была голоморфной в* B_R *необходимо и достаточно, чтобы части поверхностей графиков функции* u, v *и* $\sqrt{u^2+v^2}$, *расположенные над каждым множеством* $\sigma T \subseteq B_R : \sigma \in M$, *имели одинаковую площадь.*

Литература

1. Беренстейн, К. А. Комплексный анализ и уравнения в свертках / К. А. Беренстейн, Д. Струппа // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М. : ВИНИТИ, 1989. — Т. 54. — С. 5-111.
2. Волчков, В. В. О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам / В. В. Волчков // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 8. — С. 9-11.
3. Волчков, В. В. Теоремы типа Мореры в областях со слабым условием конуса / В. В. Волчков // Изв. вузов. Матем. — 1993. — № 10. — С. 15-20.
4. Дзядык, В. К. Геометрическое определение аналитических функций / В. К. Дзядык // УМН. — 1960. — Т. 15. — № 1. — С. 191-194.
5. Berenstein, C. A. Le problem de Pompeiu local / C. A. Berenstein, R. Gay // J. Anal. Math. — 1989. — V. 52. — P. 133-166.
6. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. / V.V. Volchkov // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 2003. – 454 p.