Конференция «Международная площадка конференции "Ломоносов-2026" в Таджикистане»

Секция «Секция 1.Современные исследования в области естественных наук»

К задачам потенциального обтекания препятствия и построения конформных отображений. Явные формулы

Акбаро Акбар Набижонович
Студент (бакалавр)
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе, Душанбе, Таджикистан
E-mail: akbarovakbar753@gmail.com

А. Азамова, А. Акбаров, М. Кодирова, Ш. Рустамова

Аннотация. Получены явные формулы, задающие ряд кривых в терминах угловой функции.

Ключевые слова: угловая функция односвязной области, явная формула.

В недавних работах, посвящённых явным формулам конформных отображений односвязных и двусвязных областей с кусочно-аналитической границей, а также вопросам оптимизации формы области Ω (препятствия) в потенциальном плоском или осесимметричном потоке жидкости (см., например, [1], [2, с. 129–132] и цитируемую там литературу), существенно использовалось специальное представление рассматриваемых областей. А именно, рассматриваемые области задавались в терминах длины $|\Gamma|$ её границы $\Gamma = \partial\Omega$ и её угловой функции $N = N_\Omega \colon [0, 2\pi R] \ni s \mapsto N(s)$. Здесь s — натуральный параметр на Γ, т. е. длина дуги P_0P_s, отсчитываемая в положительном направлении от точки P_0 до $P_s \in \Gamma$, а $N(s)$ — радианная мера угла между осью x и внешней нормалью $\vec{\nu}$ к границе Ω в точке P_s.

Таким образом, для решения важных вопросов, относящихся к проблемам потенциальных течений, а также конформных отображений, в том числе двусвязных областей, требуется предварительно представить рассматриваемую область, заданную изначально в полярных координатах (r, θ), через её угловую функцию. Этот общий вопрос рассмотрен ниже на примере семейства кривых

$$\Gamma = \Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(r,\theta) \;\middle|\; r(\theta) = 2^k \cos^k\theta, \quad |\theta| \le \tfrac{\pi}{2}\right\}, \quad 1 \le k \le 3. \tag{1}$$

1. Кривая, заданная формулой (1), симметрична относительно оси x. Достаточно построить её угловую функцию N лишь для верхней её части Γ^+, где $0 \le \theta \le \pi/2$. Будем отсчитывать натуральный параметр s от точки P_0, соответствующей $\theta = 0$, т. е. $s = 0$ в точке $(2^k, 0)$. При $k = 1$ кривая Γ есть окружность радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$, и простые геометрические построения дают $N(s) = s$.

Получим этот частный результат построениями, применимыми к Γ_k при любом k. Будем исходить из формулы для скалярного произведения единичных векторов $\vec{\nu}$ и $\vec{e}_x$:

$$\vec{\nu} \cdot \vec{e}_x = |\vec{\nu}| \cdot |\vec{e}_x| \cos N(s(\theta)). \tag{2}$$

Нормаль к линии уровня f пропорциональна ∇f. Для $f(r,\theta) = r - 2\cos\theta$: $\nabla f = \vec{e}_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta$, т. е. $\nabla f = (1, \operatorname{tg}\theta)$, откуда $|\nabla f| = \frac{1}{|\cos\theta|}$. Повторяя стандартные выкладки с учётом того, что $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = -\sin\theta$, получаем $\cos N(s(\theta)) = \cos 2\theta$, и при начальном условии $N\big|_{\theta=0} = 0$:

$$N(s) = 2\theta. \tag{3}$$

Формула для натурального параметра при $k = 1$ даёт $s(\theta) = 2\theta$, что подтверждает контрольный тест: $N(s) = s$.

Теорема 1. *Для кривой (1) при $k = 1$: $N(s) = s$, $|\Gamma| = 2\pi$.*

2. Для произвольного k аналогичные построения дают $\nabla f = (1,\, k\operatorname{tg}\theta)$, откуда

$$|\nabla f| = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}}{\cos\theta}.$$

Приравнивая два выражения для $\nabla f \cdot \vec{e}_x$ и сокращая на $\cos\theta$, получаем:

$$\cos N(\theta) = \frac{\cos^2\theta - k^2\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}},$$

откуда

$$N(\theta) = \arccos\left(\frac{\cos^2\theta - k^2\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}}\right). \tag{4}$$

При $k = 1$ формула (4) даёт $N = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$ — контрольный тест пройден.

Натуральный параметр и длина кривой задаются формулами:

$$s(\theta) = 2^k \int_0^\theta \cos^{k-1}(\theta')\sqrt{\cos^2\theta' + k^2\sin^2\theta'}\, d\theta', \tag{5}$$

$$|\Gamma| = 2 \cdot 2^k \int_0^{\pi/2} \cos^{k-1}(\theta)\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}\, d\theta. \tag{5'}$$

При $k = 3$ формула (5) принимает вид

$$s(\theta) = 8\int_0^\theta \cos^2\theta' \cdot \sqrt{1 + 8\sin^2\theta'}\, d\theta', \tag{5''}$$

что является эллиптическим интегралом и не выражается через элементарные функции; значение $s(\theta)$ вычисляется численно.

Функция $\theta \mapsto s(\theta)$ строго возрастает на $[0, \pi/2)$, поскольку

$$\frac{ds}{d\theta} = 2^k \cdot \cos^{k-1}\theta \cdot \sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta} > 0.$$

По теореме об обратной функции существует единственная обратная $\theta = \theta(s)$. Подставляя в (4), получаем угловую функцию от натурального параметра:

$$\mathbf{N}(s) = \arccos\left(\frac{\cos^2\theta(s) - k\sin^2\theta(s)}{\sqrt{\cos^2\theta(s) + k^2\sin^2\theta(s)}}\right). \tag{6}$$

При $k = 1$: $\theta(s) = s/2$, откуда $\mathbf{N}(s) = s$. При $k = 3$: $\theta(s)$ и $\mathbf{N}(s)$ вычисляются численно по формулам (5”) и (6).

Теорема 2. *Для кривой Γ_k при $1 \le k \le 3$ функции $N(\theta)$ и $s(\theta)$ задаются формулами (4) и (5). Функция $\theta \mapsto s(\theta)$ строго возрастает на $[0, \pi/2)$ и обратима. Обозначая обратную $\theta(s)$, получаем угловую функцию $\mathbf{N}(s)$ по формуле (6). При $k = 1$: $\mathbf{N}(s) = s$.*

Авторы признательны А. С. Демидову и Е. В. Тимохину за постановку задачи и помощь в работе.

Источники и литература

1) A. S. Demidov. Robin problem, Poincaré – Steklov operators in plan and axisymmetric domains. Explicit formulas. *Russian Journ. Math. Physics*, to appear (2026).

2) А. С. Демидов, Е. В. Тимохин. К задачам оптимизации формы объекта в потенциальном плоском потоке. *Фундаментальная и прикладная математика*, 25, №4, 129–132 (2025).

Иллюстрации

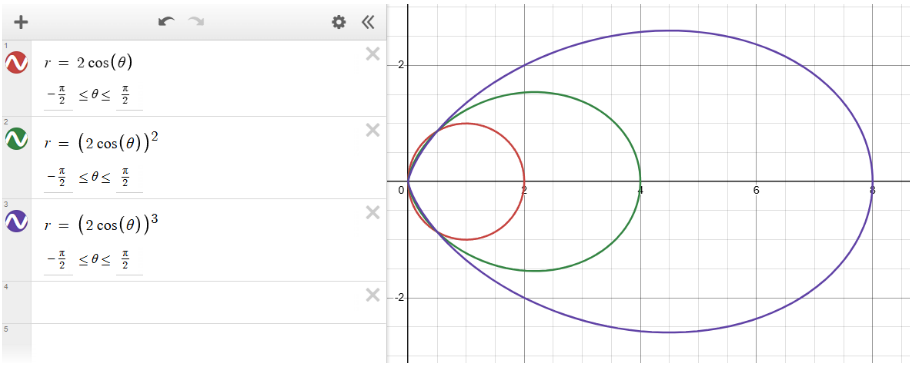

Рис. : Рис.1

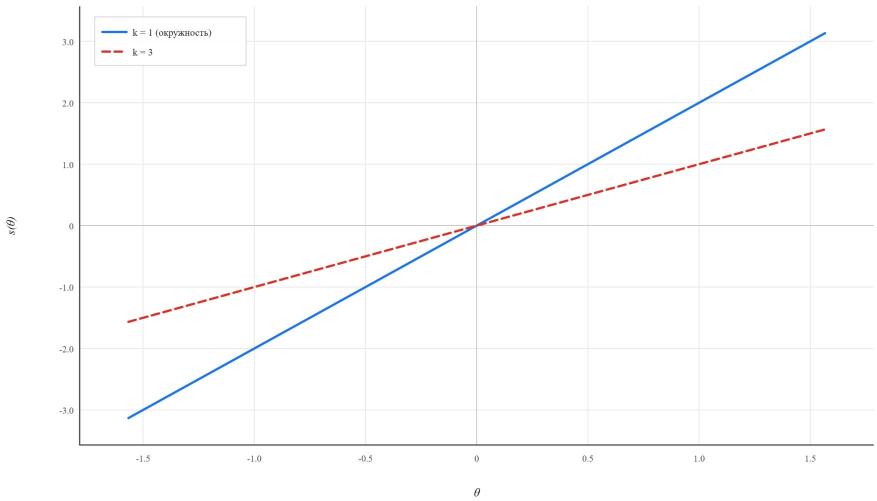

Рис. : Рис.2 [s(theta)]

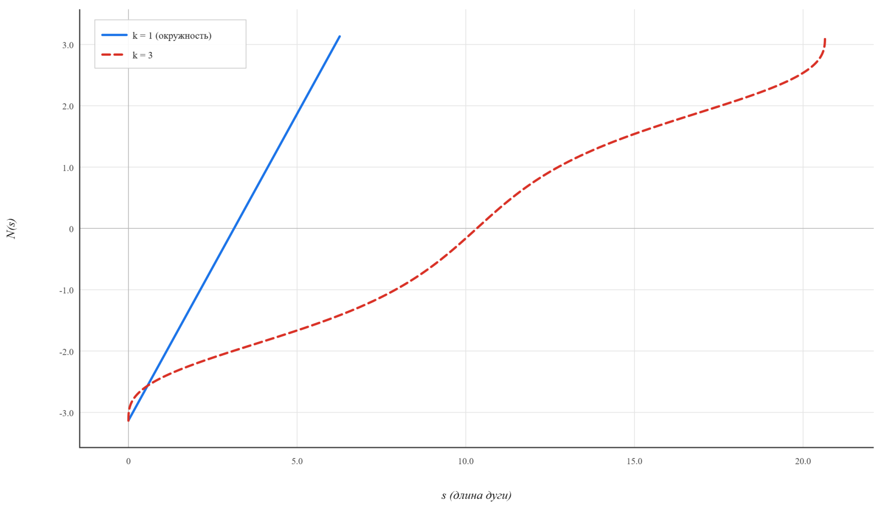

Рис. : Рис.3 [N(s)]