

Матричные методы для эффективного вычисления индексов Кирхгофа

Ахметова Карина Нурлановна

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Филиал МГУ в городе Сарове, Саров, Россия

E-mail: ahmkarie@yandex.ru

Индекс Кирхгофа Kf является важной спектральной характеристикой графовых данных. Он определяется как сумма эффективных сопротивлений Ω_{ij} между всеми парами вершин. Для графа G с N вершинами и матрицей Лапласа L индекс вычисляется через псевдообратную матрицу [1,3], что при прямом расчете имеет сложность $O(N^3)$, что затрудняет исследование больших или динамически растущих структур.

В работе рассматриваются растущие графы и исследуется зависимость роста индекса Кирхгофа от стратегии присоединения: случайный выбор, присоединение к наиболее центральному узлу, минимизирующему сумму сопротивлений, и к наименее центральному. Согласно теоретическим предсказаниям [4], нормированный индекс Кирхгофа в этих случаях асимптотически ведёт себя как $N \ln N$, N и N^2 соответственно, что соответствует полному индексу $Kf \sim N^2 \ln N$, N^2 и N^3 .

На языке Python реализован алгоритм, моделирующий рост графа на основе начального графа Эрдёша-Реньи. Для упорядочения узлов по центральности применяется центральность сопротивления. На каждом шаге добавляется новая вершина, соединяющаяся с одной существующей. Полученные зависимости Kf/N от числа вершин N в логарифмическом масштабе подтверждают теоретические предсказания статьи [4]. При случайном присоединении наблюдается рост $Kf/N \sim N \ln N$, при присоединении к наиболее центральному узлу – $Kf/N \sim N$, а к наименее центральному – $Kf/N \sim N^2$.

Дальнейшие исследования будут направлены на реализацию алгоритма обновления псевдообратной матрицы Лапласа с использованием формулы Шермана-Моррисона-Вудбери [2] для вычисления как глобального индекса, так и локальных мер центральности.

Источники и литература

- 1) Klein D.J., Randić M. Resistance distance // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. Vol. 12. P. 81–95.
- 2) Meyer C.D. Generalized inversion of modified matrices // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 24, no. 3. P. 315–323.
- 3) Tyloo M., Coletta T., Jacquod P. Robustness of synchrony in complex networks and generalized Kirchhoff indices // Physical Review Letters. 2018. Vol. 120, no. 8. P. 084101.
- 4) Tyloo M. Evolution of robustness in growing random networks // Entropy. 2023. Vol. 25, no. 9. P. 1340.