

**Теорема о существовании и единственности решения задачи Зарембы для
уравнения со сносом и потенциалом**

Гамидова Наира Ниязовна

Студент (магистр)

Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,
Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан

E-mail: gamidova.naira@gmail.com

Ставится вопрос об однозначной разрешимости задачи Зарембы для эллиптического оператора с младшими членами, заданного в ограниченной строго липшицевой области $D \in \mathbb{R}^n$, где $n > 1$, вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u. \quad (1)$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая непрерывная и симметрическая матрица, функция $c(x) \in C(D)$, а вектор-функция $b(x)$ такова, что

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)), \quad b_j(x) \in L_p(D), \quad p > n. \quad (2)$$

Пусть $F \subset \partial D$ замкнутое множество. Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u = l \quad \text{в } D, \quad u = 0 \quad \text{на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } G, \quad (3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ означает внешнюю кономальную производную функции u , а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_2^1(D, F)$.

Под решением задачи (3) понимается функция $u \in W_2^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное соотношение

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx - \int_D c u \varphi \, dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (4)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$, где компоненты вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_n)$, возникающей из представления линейного непрерывного функционала, являются функциями из $L_2(D)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая непрерывная и симметрическая матрица, выполнено (2) и справедливо неравенство Фридрихса для функций $u \in W_2^1(D, F)$, то задача Зарембы (3) однозначно разрешима в $W_2^1(D, F)$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)} \quad (5)$$

с постоянной C , зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства.

Аналогичная задача для оператора без сноса рассмотрена в [1].

Источники и литература

- 1) Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin, V.G. Maz'ya. On the Boyarsky–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem // Arch Rational Mech Anal.- 2022.- v. 245, No 2. - p. 1197–1211.