

Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

Пыряева Вера Алексеевна

Студент (бакалавр)

Самарский государственный социально-педагогический университет, Факультет математики, физики и информатики, Самара, Россия

E-mail: pyryaeva.vera@sgspu.ru

Методы операционного исчисления применяются для решения математических задач, возникающих в различных сферах науки и техники, с их помощью, например, можно упростить решение дифференциальных уравнений. Приведём кратко основные теоретические положения и пример решения задачи Коши операционным методом.

Функция $f(t)$, $t \in R$ называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) = 0, t < 0$
2. $f(t)$ – кусочно-непрерывная
3. $\exists M > 0, s_0 > 0 \forall t \in [0; +\infty) : |f(t)| \leq Me^{s_0 t}$

Функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\omega$ определяемая равенством $\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ называется изображением $f(t)$ (по Лапласу). Символически обозначается: $f(t) \doteq F(p)$ [1].

Также для решения дифференциальных уравнений будем использовать такие свойства преобразования Лапласа как свойство линейности, свойство дифференцирования оригинала и теорема свертывания [2].

Рассмотрим задачу Коши: $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, x(0) = x'(0) = 0$ (1)

Для решения уравнения (1) рассмотрим уравнение (2) с той же левой частью, но с правой частью, равной 1:

$$x_1''(t) - x_1'(t) = 1, x_1(0) = x_1'(0) = 0 \quad (2)$$

Пусть $x_1(t) \doteq X_1(p)$

Тогда по свойству дифференцирования оригинала:

$$x_1'(t) \doteq pX_1(p) - x_1(0) = pX_1(p)$$

$$x_1''(t) \doteq p^2X_1(p) - px_1'(0) - x_1(0) = p^2X_1(p)$$

Перейдем к операторному уравнению для дифференциального уравнения (2):

$$p^2X_1(p) - pX_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$X_1 = \frac{1}{p^2(p-1)}$$

$$X_1 = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}$$

Воспользовавшись свойством линейности, найдем оригинал для функции $x_1(t)$

$$x_1(t) = -1 - t + e^t$$

Найдем первую производную данной функции: $x_1' = -1 + e^t$

Тогда по формуле Дюамеля, которая следует из теоремы о свертывании, получим, что решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{2+e^\tau}(-1+e^{t-\tau})d\tau = 1 - e^t + (e^t + 2)\ln \frac{e^t+2}{3}$$

Ответ: $x(t) = 1 - e^t + (e^t + 2)\ln \frac{e^t+2}{3}$

Источники и литература

- 1) Битнер Г.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ростов н/Д: Феникс. 2012.
- 2) Плескунов М.А. Операционное исчисление: учебное пособие. Екатеринбург: Издательство Уральского университета. 2014.