Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Задача Цермело при наличии фазовых ограничений определенного типа

Тюрин Ростислав Русланович
Студент (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия
E-mail: trr1945@gmail.com

Научный руководитель — Черкасов Олег Юрьевич

В докладе рассматривается задача Цермело [1] при наличии фазовых ограничений определенного типа. Рассматривается частный случай функции распределения поля скоростей. В ходе решения фазовые ограничения были сведены к ограничениям на управление.

Рассмотрим гидрологический объект, в котором определенным образом распределяется течение. Направим координатную ось Ox вдоль берега, а Oy перпендикулярно ему. В этом поле скоростей находится корабль (в данной задаче он будет представлен материальной точкой) с постоянным по модулю вектором скорости v. У него есть известное начальное местоположение (x_0, y_0). Направление вектора скорости относительно оси абсцисс будем обозначать углом θ.

Данная динамическая система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v\cos\theta + W\left(y\right), \quad x\left(0\right) = x_0, \quad x\left(T\right) - \text{свободно}, \\ &\dot{y} = v\sin\theta, \quad y\left(0\right) = y_0, \quad y\left(T\right) = y_T, \\ &\dot{\theta} = u, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \quad \theta\left(0\right), \theta\left(T\right) - \text{свободны}, \\ &\left|u\right| < \infty, \quad t \in \left[0, T\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

В данной системе функция $W(y)$ задаёт величину и направление течения. Известны начальные условия для координат первоначального местоположения, а выбор начального условия для угла остаётся свободным.

Цель управления – максимизация дальности по оси Ox за фиксированное время

$$J = -x\left(T\right) \to \min. \tag{2}$$

В системе (1) опустим третье уравнение. Поскольку u входит в правую часть только одного уравнения для $\dot{\theta}$, мы опустим его и в оставшейся системе будем рассматривать θ в качестве управления. Фазовые ограничения $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ переходят, в таком случае, в ограничения на управление.

С помощью принципа максимума Понтрягина была получена следующая краевая задача

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = v\cos\theta + W\left(y\right), x\left(0\right) = x_0, x\left(T\right) - \text{свободно},\\
&\dot{y} = v\sin\theta, y\left(0\right) = y_0, \quad y\left(T\right) = y_T \quad \text{или} \quad y\left(T\right) - \text{свободно}\\
&\dot{\theta} = -\frac{\partial W\left(y\right)}{\partial y}\cos^2\theta, \quad \theta\left(T\right) = \operatorname{arctg} a.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Анализ системы (3) проведён с помощью качественных методов исследования динамических систем. Построено численное решение краевой задачи для частного случая $W(y) = 1 - y^2$ с использованием системы `Matlab`.

Литература

1. Zermelo, Ernst (1931). «Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung». Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 114-124.