Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О линейных группах над кольцами

Научный руководитель – Тимошенко Егор Александрович

Елфимова Анастасия Максимовна
Студент (магистр)
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Механико-математический факультет, Томск, Россия
E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Пусть R – евклидово кольцо или кольцо вычетов $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Как обычно, через $GL_n(R)$ будем обозначать полную линейную группу порядка n над кольцом R, а через $SL_n(R)$ – её подгруппу, состоящую из матриц с определителем 1 (т.е. специальную линейную группу).

Далее через $G^{(i)}$ обозначаем i-й коммутант группы G. Нижним центральным рядом группы G будем называть последовательность подгрупп группы G:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq ...,$$

где $G_i = [G_{i-1}, G]$ – группа, порождённая всеми коммутаторами $[a, b]$, где $a \in G_{i-1}, b \in G$.

Теорема 1. Пусть выполнено одно из условий:
1) $n > 2$;
2) $n = 2$ и $2R = 3R = R$.
Тогда коммутанты групп $SL_n(R)$ и $GL_n(R)$ совпадают с $SL_n(R)$.

Предложение 2. Если $2R = R$, то нижний центральный ряд группы $GL_2(R)$ стабилизируется на первом шаге, причём

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \big(GL_2(R)\big)_i = SL_2(R).$$

Рассмотрим теперь поведение цепи коммутантов линейных групп для случая, когда $n = 2$ и $6R \neq R$. Всюду ниже R – некоторое подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Предложение 3. Если $2R \neq R$, то для всякого натурального k группа $GL_2(R/2^kR)$ имеет тривиальный $(k + 1)$-й коммутант.

Предложение 4. Если $3R \neq R$, то для всякого натурального k группа $GL_2(R/3^kR)$ имеет тривиальный $(k + 3)$-й коммутант.

С помощью предложений 3 и 4 доказывается

Теорема 5. Пусть $G = GL_2(R)$ или $G = SL_2(R)$. Если $2R \neq R$ или $3R \neq R$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G^{(i)} = \{E\},$$

где E – единичная матрица второго порядка.

Список литературы

[1] Елфимова А.М., Тимошенко Е.А. О линейных группах над кольцами // Все грани математики и механики: Сборник статей Всероссийской молодёжной научной конференции. – Томск, 2020. – С. 13–20.

[2] Курош А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.