

Многогранники бинарных деревьев и формула веса минимального параметрического заполнения. Бинарное дерево типа "Змея".

Научный руководитель – Иванов Александр Олегович

Щербаков Олег Сергеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия

E-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Широко известна классическая задача Штейнера о поиске сети минимальной длины, соединяющей заданный набор точек на плоскости [1]. Задача Штейнера и её обобщения имеют множество приложений: проектирование транспортных сетей, линий электропередач, беспроводных сетей и т.п. Разные обобщения получаются путём изменения формулировки классической задачи: набор точек рассматривается в каких-либо метрических пространствах, изучаются различные аналоги длины, вводятся некоторые ограничения на сети.

Задача минимального заполнения конечного метрического пространства поставлена и подробно описана в [2] (краткое введение в [3] или [4]). Это — одно из обобщений, с одной стороны задачи Штейнера о кратчайшей сети, с другой – задачи Громова о минимальном заполнении гладкого риманова многообразия.

Задача состоит в поиске взвешенного графа наименьшего веса, соединяющего данное метрическое пространство (т.е. точки метрического пространства вкладываются в множество вершин графа) так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве. В ходе решения задачи приходится иметь дело с т.н. задачей минимального параметрического заполнения (ЗМПЗ), в такой постановке фиксируется граф (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях.

Ещё в работе [2] отмечена связь ЗМПЗ с задачей линейного программирования, однако подробное исследование дано в статье [3]. В работе [4] получена формула веса минимального заполнения в терминах так называемых мультиобходов. Несмотря на то, что не дано точных рецептов по поиску этих мультиобходов, разработана техника работы с мультиобходами, введено понятие неприводимых мультиобходов. Так же показано, что неприводимых мультиобходов конечное число. Формула веса минимального параметрического заполнения использует только неприводимые мультиобходы.

В работе [3] поиск формулы веса минимального параметрического заполнения осуществляется в терминах задачи линейного программирования. Задача о поиске минимального параметрического заполнения рассматривается как классическая задача линейного программирования (КЗЛП), затем следует переход к двойственной задаче (ДЗ). Как известно, КЗЛП и ДЗ разрешимы или не разрешимы одновременно (в рассматриваемом случае разрешимы) и минимум целевой функции на допустимом множестве в КЗЛП совпадает с максимумом целевой функции в ДЗ на допустимом множестве в ДЗ. В ДЗ допустимое множество строится по бинарному дереву — это многогранник X , который не зависит от метрического пространства (в отличие от допустимого множества в классической задаче), а зависит только от типа заполнения. Вершины многогранника X соответствуют некоторым мультиобходам, а произвольному мультиобходу соответствует некоторая точка

многогранника. Вес заполнения рассматривается как целевая функция в КЗЛП. Значение минимального веса совпадает с максимумом целевой функции ДЗ, который достигается на одной из вершин многогранника X .

В настоящей работе

- установлена биекция между множеством неприводимых мультиобходов и множеством вершин многогранника X ;
- доказано, что формула веса минимального параметрического заполнения полученная в работах [3] и [4] не может быть улучшена;
- явно предьявлено строение всех мультиобходов, в том числе неприводимых, для бинарного дерева определённого типа (так называемая “змея”) с произвольным количеством вершин.

Источники и литература

- 1) Иванов А.О., Тужилин А.А. - “Теория экстремальных сетей”, Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 424 с.
- 2) Иванов А.О., Тужилин А.А. - “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Математический сборник сб., 2012, том 203, номер 5, 65–118
- 3) A.Ivanov, A.Tuzhilin, Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space, ArXiv e-prints: arXiv:1907.03828 (2019). In: Manuilov V.M., Mishchenko A.S., Nazaikinskii V.E., Schulze BW., Zhang W. (eds) Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham., pp. 165-182, (2022) \url{https://doi.org/10.1007/978-3-030-37326-9_11}.
- 4) Еремин А.Ю. - “Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства” Математический сборник 2011