Секция «Геометрия и топология»

Классификация бифуркаций критических точек гладких инвариантных функций и ее приложение к интегрируемым системам

Онуфриенко Мария Викторовна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

Фиксируем $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим действие группы $G = \mathbb{Z}_s$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ вида $z \longrightarrow e^{2\pi i/s}z$, где $z = x + iy \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Рассмотрим морсовские функции $F_{s,0} = F_{s,0}^{\pm,\pm}(z) = \pm|z|^2 = \pm(x^2 + y^2)$ при $s \geq 1$, и $F_{s,0} = F_{s,0}^{+,-}(z) = x^2 - y^2$ при $s = 1, 2$. Рассмотрим два семейства G–инвариантных ростков $F_{s,k} = F_{s,k}(z, a, \lambda)$, $k = 1, 2$, от переменных $z = (x, y)$ в нуле:

$$F_{s,1} = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{s+2} + \lambda y^s, & s = 1, 2, \\ \mathrm{Re}(z^3) + \lambda |z|^2, & s = 3, \\ \mathrm{Re}(z^s) \pm a|z|^4 + \lambda |z|^2, & s \geq 4, \end{cases}$$

$$F_{s,2} = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{2s+2} + \lambda_2 y^{2s} + \lambda_1 y^s, & s = 1, 2, \\ \mathrm{Re}(z^4) \pm (1 + \lambda_2)|z|^4 \pm a|z|^6 + \lambda_1 |z|^2, & s = 4, \\ \mathrm{Re}(z^5) \pm a|z|^6 + \lambda_2 |z|^4 + \lambda_1 |z|^2, & s = 5, \\ \mathrm{Re}(z^s) \pm a_1 |z|^6 + a_2 |z|^8 + \lambda_2 |z|^4 + \lambda_1 |z|^2, & s \geq 6. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{R}^k$ — параметры, $a = (a_i) \in \mathbb{R}^m$ — модули, $m \in \{0, 1, 2\}$ — модальность; $a^2 \neq 1$ при $(s, k) = (4, 1)$; $a > 0$ при $s \neq k + 3$; $a_1^2 \neq 1$ при $(s, k) = (6, 2)$; $a_1 > 0$ иначе.

Теорема 1. *Рассмотрим классы* правой *G–эквивалентности G–инвариантных ростков функций $F_{s,k}(z, \hat{a}, 0)$ двух переменных в нуле, $k = 0, 1, 2$. Эти особенности имеют G–коразмерность k, G–кратность Милнора $k + m + 1$, G–версальную деформацию $F_{s,k}(z, a, \lambda) + \lambda_0$. Дополнение к их объединению в множестве $\mathfrak{n}_G^2$ G–инвариантных ростков в нуле, имеющих критическую точку 0 с критическим значением 0, имеет коразмерность > 2 в $\mathfrak{n}_G^2$.*

Таким образом, в типичных k-параметрических семействах гладких G-инвариантных функций от двух переменных, $k \leq 2$, встречаются только указанные особенности. Теорема 1 не следует из классификации [1]. Доказательство теоремы 1 основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Алгебра G–инвариантных многочленов от x, y с вещественными коэффициентами мультипликативно порождена однородными многочленами $|z|^2$, $\mathrm{Re}(z^s)$, $\mathrm{Im}(z^s)$. Она является линейной оболочкой многочленов $\mathrm{Re}(z^k \bar{z}^l)$, $\mathrm{Im}(z^k \bar{z}^l)$, где $k \geq l$, $s \mid (k - l)$. В частности, любой G–инвариантный росток $f(z)$ в нуле имеет ряд Тейлора вида*

$$f(z) = \mathrm{Re} \sum_{p,q \geq 0} c_{pq} |z|^{2p} z^{qs} = c_0 + c_1 |z|^2 + \mathrm{Re}(c_2 z^s + c_3 |z|^2 z^s) + c_4 |z|^4 + c_5 |z|^6 + c_6 |z|^8 + \ldots \quad (1)$$

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — G–инвариантный росток в нуле с рядом Тейлора вида* (1), *где $s \geq 3$, $c_0 = 0$. Росток $f(z)$ право–G–эквивалентен ростку $F_{s,k}(z, a, 0)$, $k = 0, 1, 2$, тогда и только тогда, когда либо*
(a) $k = 0$, $c_1 \neq 0$, *либо*

(b) $k=1$, $c_1=0$, $c_2\neq 0$ *и* $a=|c_4|/|c_2|^{4/s}$, *либо*
(c) $k=2$, $c_1=|c_2|^2-c_4^2=0$, $c_4\neq 0$, $a=|c_5-c_4\mathrm{Re}(\frac{c_3}{c_2})|/|c_2|^{3/2}$ *при* $s=4$; $c_1=c_4=0$, $c_2\neq 0$, $a=|c_5|/|c_2|^{6/5}$ *при* $s=5$; $c_1=c_4=0$, $c_2\neq 0$, $a_1=\frac{|c_5|}{|c_2|^{6/s}}$, $a_2=(c_6-c_5\mathrm{Re}(\frac{6c_3}{sc_2}))/|c_2|^{8/s}$ *при* $s\geq 6$.

Опишем приложение теоремы 1 к классификации структурно устойчивых особенностей интегрируемых систем с 2 и 3 степенями свободы. Напомним, что *интегрируемая система* $(M,\omega,\mathcal{F})$ *с* n *степенями свободы* задается гладким отображением $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n):M\to\mathbb{R}^n$, где $\{f_i,f_j\}=0$, $\dim M=2n$. Рассмотрим действие группы G на полнотории $V=D^2\times S^1$, порожденное диффеоморфизмом вида $(z,\varphi_1)\mapsto(e^{2\pi i\frac{\ell}{s}}z,\varphi_1+\frac{2\pi}{s})$, где $0\leq\ell<s$, $(\ell,s)=1$. Рассмотрим цилиндр $W=D^{n-1}\times(S^1)^{n-2}$ с координатами $\lambda=(\lambda_i)_{i=1}^{n-1}$, $\varphi'=(\varphi_j)_{j=2}^{n-1}$.

Из теоремы 1 можно вывести, что *локальные особенности* (т.е. $\mathbb{R}^n-$орбиты) ранга $n-1$ типичных интегрируемых систем с $n\leq 3$ степенями свободы имеют окрестности, гладко эквивалентные *стандартной модели* $(M_{\frac{\ell}{s}},\omega_{\frac{\ell}{s}},\mathcal{F}_{\frac{\ell}{s},k,a})$ вида

$$M_{\frac{\ell}{s}}=(V/G)\times W,\quad \omega_{\frac{\ell}{s}}=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\sum_{j=1}^{n-1}\mathrm{d}\lambda_j\wedge\mathrm{d}\varphi_j,$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\ell}{s},k,a}:M_{\frac{\ell}{s}}\to\mathbb{R}^n,\quad \mathcal{F}_{\frac{\ell}{s},k,a}(z,\varphi_1,\lambda,\varphi')=(\lambda,F_{s,k}(z,a(\lambda),\lambda')),$$

где $0\leq k<n$, $\lambda'=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$, $a(\lambda)$, $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ — гладкие функции при $(s,k)\in\{(4,1),(6,2)\}$; $a(\lambda)\equiv 1$ при $(s,k)\neq(4,1)$; $a_2(\lambda)\equiv 1$ при $(s,k)=(6,2)$; $a_1(\lambda)\equiv 1$ при $s\geq 7$ и $k=2$.

При $n=2$, $k=1$ описанные выше особенности — это параболические орбиты с резонансом ℓ/s [2]. В вещественно-аналитическом случае они типичны и структурно устойчивы [2], а также гладко структурно устойчивы, если порядок резонанса $s\neq 4$ [3]. При $n=3$, $k=2$ получаем типичные бифуркации параболических особенностей с резонансами.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) Wassermann G. Classification of singularities with compact Abelian symmetry //Banach Center Publications. – 1988. – Т. 20. – №. 1. – С. 475-498.
2) Калашников В. В. Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии //Изв. РАН. Сер. матем. - 1998. - Т. 62. - №. 2. - С. 49-74.
3) Kudryavtseva E. A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems //European J. Math. - 2021. - doi.org/10.1007/s40879-021-00501-9, 63 pp.