Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Итерационные методы решения двумерного квазилинейного параболического уравнения с дробной производной по времени

Научный руководитель – Лапин Александр Васильевич

Левинская Ксения Олеговна

Студент (бакалавр)

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: sisina.kseniya@yandex.ru

Рассмотрим однородную краевую задачу Дирихле для параболического уравнения с дробной производной по времени:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha y - \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\big(a_i(x,t)\, g\big(\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\big)\big) = f(x,t) \text{ в } Q = \Omega \times (0,T] \\ \\ y = 0, \quad x \in \partial\Omega \times [0,T], \quad y(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$,

$\mathcal{D}_t^\alpha y(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dfrac{\partial y}{\partial s}(s) ds, \quad (0 < \alpha < 1)$ — дробная производная в определении Капуто ($\Gamma(x)$ – гамма-функция).

Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

$$a_i(x,t) \text{ непрерывны в } \bar{Q}, \quad 0 < \phi_0 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \phi_1, \quad \forall (x,t) \in \bar{Q}, \tag{2}$$

$$(g_i(p) - g_i(q))(p-q) \geqslant \psi_0 (p-q)^2, \quad \psi_0 > 0, \tag{3}$$

$$|g_i(p) - g_i(q)| \leqslant \psi_1 |p-q| \quad \forall p, q \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, 2. \tag{4}$$

Конечно-разностную схему для задачи (1) строим на равномерной сетке с шагами τ по t и h_i по x_i $(i = 1, 2)$. $L1$-аппроксимацию производной Капуто от непрерывной функции $y(t)$ получим её заменой непрерывной и кусочно-линейной функцией:

$$\mathcal{D}_t^\alpha y(t_k) \approx \partial_t^\alpha y(t_k) = d_1 y^k + \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j}, \quad \text{при} \quad t_k = k\tau,$$

где $y^j = y(t_j)$, а коэффициенты $d_j = \dfrac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}\right)$.

Эллиптическую часть уравнения приближаем в точке сетки (x, t_k) конечно-разностным выражением:

$$A_{ik} y = -\frac{1}{2} \bar{\partial}_i (a_i(x,t_k), g_i(\partial_i y)) - \frac{1}{2} \partial_i (a_i(x,t_k), g_i(\bar{\partial}_i y)), \ \ i = 1, 2,$$

где $\partial_i y$ и $\bar{\partial}_i y$ — правая и левая конечные разности соответственно.

В результате имеем неявную сеточную схему, представляющую собой следующую систему нелинейных алгебраических уравнений на временном слое k:

$$d_1 y^k + A_k y^k = f^k - \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j}, \qquad k = \overline{1, N_t}. \tag{5}$$

Пусть R – сеточный оператор Лапласа с однородными условиями Дирихле, $Ry = -\partial_1 \bar{\partial}_1 y - \partial_2 \bar{\partial}_2 y$ во внутренних узлах сетки. В силу предположений (2) - (4) для всех k справедливы следующие оценки:

$$(A_k y - A_k z, y - z) \geqslant \phi_0 \psi_0 (R(y - z), y - z), \tag{6}$$

$$(A_k y - A_k z, w) \leqslant \phi_1 \psi_1 (R(y - z), y - z)^{1/2} (Rw, w)^{1/2}. \tag{7}$$

В условиях (2) - (4) задача (5) имеет единственное решение. Если y_i^k, $i = 1, 2$, – решения задачи (5) с правыми частями f_i^k, $i = 1, 2$, то справедливо следующее неравенство устойчивости:

$$\frac{1}{\tau^\alpha} \|y_1^n - y_2^n\|_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \|y_1^k - y_2^k\|_1^2 \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \|f_1^k - f_2^k\|_{-1}^2 \quad \forall n \leqslant N_t. \tag{8}$$

где $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_{-1}$ – сеточные налоги норм L^2, H_0^1 и H^{-1}, а постоянная M зависит лишь от T, ϕ_0 и ψ_0.

Для численной реализации системы уравнений (5) на фиксированном слое k используем итерационный процесс:

$$B \frac{u^{(s)} - u^{(s-1)}}{\rho} + (I + d_1^{-1} A_k) u^{(s-1)} = d_1^{-1} f^k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(d_{j+1} - d_j)}{d_1} y^{k-j}. \tag{9}$$

В качестве предобусловливателей B берем факторизованные сеточные операторы, соответствующие попеременно-треугольному методу $B = (I + \omega \bar{R}_1)(I + \omega \bar{R}_2)$ или методу переменных направлений $B = (I + \omega R_1)(I + \omega R_2)$. Здесь I – тождественный оператор,

$$R_i y = -\partial_i \bar{\partial}_i y, \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{R}_1 y = -\left(\frac{1}{h_1} \partial_1 y + \frac{1}{h_2} \partial_2 y \right), \; \bar{R}_2 y = \left(\frac{1}{h_1} \bar{\partial}_1 y + \frac{1}{h_2} \bar{\partial}_2 y \right),$$

ω – итерационный параметр.

Обоснована сходимость итерационных методов. На основе известных результатов для итерационных методов решения сеточных уравнений выведены оптимальные итерационные параметры и получены оценки скорости сходимости итерационных методов. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические выводы.