Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

## Вычисление структурных констант алгебры Ли типа $F_4$

**Научный руководитель – Колесников Сергей Геннадьевич**

***Половинкина Анна Ильинична***
*Студент (бакалавр)*
Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики, Красноярск, Россия
*E-mail: apolovinkina1399@gmail.com*

Структурные константы $N_{r,s}$ простой алгебры Ли определяются из равенства: $[e_r, e_s] = N_{r,s}e_{r,s}$ , где $\{e_r, r \in \Phi,\ h_s \in \Pi\}$ – базис алгебры Ли, $\Phi$ – система корней, $\Pi$ – фундаментальная система корней. Зафиксируем множество векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$: $\pm\epsilon_i(1 \le i \le 4)$, $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j(1 \le i < j \le 4)$, $\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$, где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ - ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$, который образует систему корней $\Phi$ типа $F_4$, а следующие корни образуют фундаментальную систему корней $\Pi(\Phi)$: $a = \epsilon_2 - \epsilon_3, b = \epsilon_3 - \epsilon_4, c = \epsilon_4, d = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$.
Результатом работы стала следующая теорема:
**Теорема.** Структурные константы простой алгебры Ли типа $F_4$ имеют вид, указанный в следующей таблице *(в связи с ограниченностью места приведен лишь фрагмент таблицы)*:

| $N_{r,s}$ | $d$ | $b$ | $a+b+2c$ | $a+b+2c+d$ | $a+2b+2c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | | | $\epsilon_6$ | $2\epsilon_7$ | $\epsilon_8$ |
| $b$ | | | $\gamma_2$ | $\epsilon_6\epsilon_7\gamma_2$ | |
| $a+b+2c$ | $-\epsilon_6$ | $-\gamma_2$ | | | |
| $a+b+2c+d$ | $-2\epsilon_7$ | $-\epsilon_6\epsilon_8\gamma_2$ | | | |
| $a+2b+2c$ | $-\epsilon_8$ | | | | |

Данная таблица получена с помощью вычислений структурных констант, используя их свойства и соотношения.

На примере константы $N_{b,a+b+2c+d}$ покажем, как проводились вычисления.
Пусть $N_{b,a+b+2c} = \epsilon_6$, $N_{d,b+2c+d} = \epsilon_8$, $N_{b,a+b+2c} = \gamma_2$. Рассмотрим следующее равенство: $(d) + (a + 2b + 2c) + (-a - 2b - 2c - d) = 0$. Тогда:

$$\epsilon_8 = N_{d,b+2c+d} = N_{b+2c+d,-a-2b-2c-d} = 0.5N_{-a-2b-2c-d,d} \ (*)$$

Из (*) и равенства $(b) + (a + b + 2c) + (-a - 2b - 2c) = 0$ следует соотношение:

$$N_{b,a+b+2c} = N_{a+b+2c,-a-2b-2c} = \gamma_2 \ (**)$$

Рассмотрим $(b) + (a + b + 2c + d) + (-d) + (-a - 2b - 2c) = 0$, тогда получим:

$$\frac{N_{b,a+b+2c+d}N_{-d,-a-2b-2c}}{1} + \frac{N_{a+b+2c+d,-d}N_{b,-a-2b-2c}}{2} + \frac{N_{-d,b}N_{a+b+2c+d,-a-2b-2c}}{1} = 0$$

Из (*),(**), последнего равенства и свойств структурных констант следует:

$$-\epsilon_8 N_{-d,-a-2b-2c} + \epsilon_6\gamma_2 + 0 = 0 \Rightarrow N_{-d,-a-2b-2c} = \epsilon_6\epsilon_8\gamma_2$$

Помимо этого, в итоги работы вошли графы связей структурных констант и программа, представляющая таблицу значений структурных констант в явном виде.

### Источники и литература

1) Ивченко, Юлия Константиновна. О регулярности силовких P-групп Шевалле исключительных лиевых типов $G_2$ и $F_4$ [Электронный ре-сурс] : выпускная дипломная работа: 01.01.01.65 / Ю. К. Ивченко. – Красноярск : СФУ, 2012
2) Carter.R. Simple groups of Lie type.-New York: Wiley and Sons, 1972. 458c.