Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Производная итераций функции Минковского в точках специального вида

Научный руководитель – Мощевитин Николай Германович

Шульга Никита Анатольевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории чисел, Москва, Россия

E-mail: nikita1279@yandex.ru

Функция Минковского $?(x)$, построенная Германом Минковским в работе [5], представляет собой пример строго монотонной сингулярной функции на отрезке $[0,1]$. Одним из эквивалентных определений является явная формула, определенная на разложениях в цепную дробь. Для рационального или иррационального $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ определим

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+\ldots+a_k-1}}$$

Если цепная дробь конечна (то есть x - рациональное число), то бесконечная сумма превращается в конечную. Свойства данной функции были исследованы многими авторами. Со времен Минковского известно, что $?(x)$ переводит квадратичные иррациональности в рациональные числа, а рациональные числа - в двоично-рациональные. Большое внимание математиков привлекли вопросы, связанные с производной функции $?(x)$, которая, если существует, может принимать лишь 2 значения - 0 и $+\infty$. В работе [1], Мощевитин и Душистова привели достаточные условия для существования и равенства производной каждому из двух возможных значений. Дальнейшие улучшения результатов о производной содержатся в работах [2], [3] и других. В настоящей работе мы рассматриваем функцию

$$f_n(x) := \underbrace{?(?(...?}_{\text{n раз}}(x))).$$

Используя результат Мощевитина-Душистовой, а также некоторые методы из работы [4], удалось построить множество M нетривиальных (в данном случае не конечных и не периодических) цепных дробей, такое что для каждого $x_0 \in M$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f_n'(x_0) = 0$.

Источники и литература

1) А. А. Душистова, Н. Г. Мощевитин, “О производной функции Минковского ?(x)”, Фундамент. и прикл. матем., 16:6 (2010), 33–44.
2) И. Д. Кан, “Дифференцируемость ?(x)-функции Минковского. II”, Изв. РАН. Сер. матем., 83:5 (2019), 53–87.
3) И. Д. Кан, “Дифференцируемость ?(x)-функции Минковского. III”, Матем. сб., 210:8 (2019), 87–119.
4) D. Gayfulin, N. Shulga, "Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function", Acta Arithmetica 195 (2020), 367-382MSC.
5) H. Minkowski, "Zur Geometrie der Zahlen", Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresous, Heidelberg 1904, 164-173.