Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Свойства графа, определенного множеством нулей многочлена

Научный руководитель – Михалёв Александр Васильевич

Промыслов В.В.[1], *Максаев А.М.*[2]

1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия, *E-mail: valentin.promyslov@gmail.com*; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия, *E-mail: artmak95@mail.ru*

В 2008 году Д. Андерсон и А. Бадави (см. [1]) ввели понятие регулярного графа кольца R с единицей. Для кольца квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$ в качестве вершин регулярного графа рассматривается множество $GL_n(\mathbb{F})$ всех невырожденных матриц, и две невырожденные матрицы A и B соединяются ребром, если их сумма $A+B$ вырождена. Обозначим этот граф через $\Gamma_n(\mathbb{F})$.

В статье [2] 2009 года математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было установлено, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно:

$$\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k!\binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

Таким образом, размеры полных подграфов в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ ограничены — в частности, $\Gamma_n(\mathbb{F})$ не содержит бесконечных полных подграфов. В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ (см. [3]).

В 2015 году Иштван Томон (см. [4]) дал отрицательный ответ на этот вопрос, доказав, что при $n > 1$ для любого алгебраически замкнутого поля $\overline{\mathbb{F}}$ характеристики $p > 2$ выполнено:

$$\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}})) = \infty.$$

Однако вопрос остался открытым для полей характеристики 0, в частности, для $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

При попытках исследования этого вопроса авторы рассмотрели обобщение графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$, зависящее от произвольного многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$. В докладе будет сформулировано это определение и показана его связь с вышеуказанной задачей. Также будут установлены алгебраические и комбинаторные свойства такого графа.

Источники и литература

1) D.F. Anderson, A. Badawi, The total graph of a commutative ring, J. Algebra 320 (2008) 2706–2719.

2) S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari, The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite, Linear Algebra and its Applications 431 (2009) 1715–1718.

3) P. Cameron, Research problems from the BCC22, Discrete Math 311 (2011) 1074–1083.

4) I. Tomon, On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras, Linear Algebra and its Applications475 (2015) 154–162.