Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О канторовости полигонов над полурешетками

Научный руководитель – Кожухов Игорь Борисович

Сотов Александр Сергеевич

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической информатики, Москва, Россия

E-mail: alexandersotov@yandex.ru

Пусть S – полугруппа, X – *полигон над полугруппой* S, т.е. множество, для которого определено отображение $X \times S \mapsto X,\ (x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющие условию $x(st) = (xs)t$ для всех $x \in X,\ s, t \in S$ (см. [2]). Хорошо известна теорема Кантора – Бернштейна (см. [4, теорема 1.1.10]): если два множества X и Y таковы, что существуют инъективные отображения $f : X \mapsto Y$ и $g : Y \mapsto X$, то существует взаимно однозначное отображение $h : X \mapsto Y$.

В [6] была доказана теорема Кантора – Бернштейна для унитарных полигонов над группами.

Теорема 1. Пусть X, Y – унитарные полигоны над группой G и пусть существуют инъективные гомоморфизмы $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$. Тогда $X \cong Y$.

Назовем полигон A над полугруппой S канторовым, если для любого полигона B из существования инъективных $A \to B$ и $B \to A$ горморфизмов следует изоморфизм $A \cong B$.

До конца не ясно для каких неунитарных полигонов верна теорема Кантора – Бернштейна, но для произвольного неунитарного полигона это неверно. Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим два неунитарных полигона X и Y над группой G. Пусть $X = \coprod\limits_{i=1}^{\infty}(X_i \cup A_i)$ и $Y = \coprod\limits_{j=1}^{\infty}(Y_j \cup B_j)$, где $X_i, Y_j \cong G/H$ и множества A_i, B_j – счетные множетсва. Причем в каждом унитарном полигоне X_i существует элемент ae, у которого полный прообраз в A_i состоит ровно из i элементов, а все остальные элементы X_i имеют счетный прообраз в A_i. Аналогично в Y_j в существует элемент be, который имеет в B_j прообраз, состоящий из $j + 1$ элемента, все остальные Y_j элементы имеют счетный прообраз в B_j (см. Рис 1).

Рассмотрим отображения $f : X \to Y$, которое действует следующим образом, каждому полигону $X_i \cup A_i$ сопосталяется полигон $Y_{i+1} \cup B_{i+1}$ и $g : Y \to X$, которое каждому полигону $Y_i \cup B_i$ сопоставляется в $X_{i+1} \cup A_{i+1}$. Из посторения ясно, что f и g инъективные горморфизмы, но в полигоне Y нет полигона эквивалентного X_1. Получается, что условия теоремы Кантора – Бернштейна выполнены, а полигоны не эквивалентны.

Назовем полигон A над полугруппой S коканторовым, если для любого полигона B из существования сюрьективных $A \to B$ и $B \to A$ горморфизмов следует изоморфизм $A \cong B$.

Рассмотрим группу G и ее подгруппы $P =< a >$, $Q =< a^2 >$. Из [2] известно, что G/P и G/Q – унитарные полигоны над группой G, также заметим, что P и Q не сопряжены и существуют сюрьективные гомоморфизмы между G/P и G/Q.

$$\begin{pmatrix} 4^n & m2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4^{-n} & -m2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4^n & 4^n + m2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4^{-n} & -m2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем противоречие. Т.е. G/P некокантором.

Источники и литература

1)
2) Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. N.-Y. –Berlin, W. de Gruyter, 2000.
3)
4) Архангельский А. В., Канторовская теория множеств – М.: Изд-во МГУ, 1988.
5)
6) Сотов А. С. Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами, Материалы VI Межд. конф. СИТОНИ-2019 . Изд-во ДонНТУ, Донецк, 2019, с. 120–123.
7)
8) Максимовский М. Ю. О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами, Матем. Заметки, 2010, Том 87, выпуск 6, 855 866

Иллюстрации

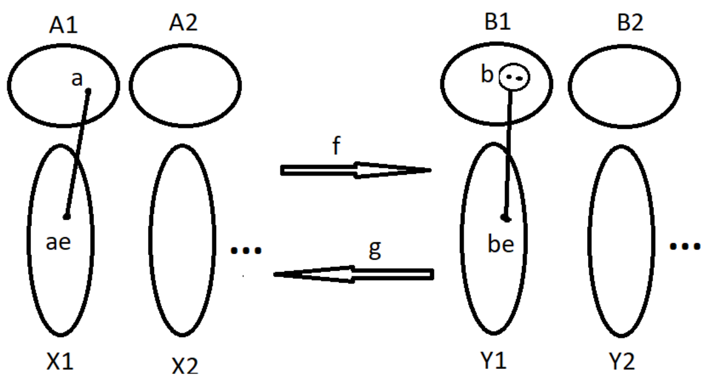

Рис. 1. Пример некanторового неунитарного полигона над группой