Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Производные структуры унарных алгебр

Научный руководитель – Артамонов Вячеслав Александрович

Лата Александр Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: alex.lata@yandex.ru

Унарной алгеброй называется универсальная алгебра, все операции которой унарны или нульарны.

Алгеброй с операторами называется алгебра с выделенной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы для остальных основных операций. Данные алгебры изучались в работах [5, 6].

Унаром с мальцевской операцией [1] называется алгебра $\langle A, d, f \rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$ и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

В [1] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f \rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, а унарная операция — ее эндоморфизмом. Эта алгебра определятся следующим образом.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases}$$

С помощью конструкции предложенной В. К. Карташовым в [1], В. Л. Усольцевым в работах [3] и [4] на произвольном унаре были определены тернарная операция $s(x, y, z)$ и операция большинства $m(x, y, z)$ перестановочные с унарной.

В работе [2] автором

- Описано строение коатомов в решетках конгруэнций алгебр $\langle A, p, f \rangle$;
- Доказано, что решетка конгруэнций алгебры $\langle A, p, f \rangle$ не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. В других случаях решетка конгруэнций алгебры $\langle A, p, f \rangle$ имеет единственный коатом.
- Установлено, что любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f \rangle$ из рассматриваемого класса не имеет дополнения.
- Установлено решетка конгруэнций любой алгебры $\langle A, p, f \rangle$ является решеткой с копсевдодополнениями.

В докладе представлены

- обобщения работы [2] на классы $\langle A, s, f \rangle$ и $\langle A, m, f \rangle$;
- эквивалентные условия отсутствия собстенных подалгебр у произвольной унарной алгебры;

- алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

Источники и литература

1) *Карташов В К.* Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тезисы сообщений участников международного семинара, посвященного памяти профессора Московского государственного университета Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31—32.
2) *Лата А. Н.* О коатомах и дополнениях в решетках конгруэнций унаров с мальцевской операцией // Чебышевский сборник, 2015, Т. 16, Вып. 4, С. 212—226.
3) *Усольцев В. Л.* Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 2. С. 127—134.
4) *Усольцев В. Л.* О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. Вып. 4. С. 196—204.
5) *Hyndman J., Nation J. B., Nishida J.* Congruence Lattices of Semilattices with Operators // Studia Logica. 2016. Vol. 104. issue 2. P. 305—316.
6) *Johnsson B.* A survey of Boolean algebras with operators // Algebras and Orders, NATO ASI Series. 1993. Vol. 389. P. 239—286.