Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Об оценках скорости сходимости нелинейных Марковских процессов

Научный руководитель – Веретенников Александр Юрьевич

Щеголев Александр Алексеевич
Аспирант
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет экономических наук, Москва, Россия
E-mail: ashchegolev@hse.ru

Пусть процесс $(X_n^\mu)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – нелинейная Марковская цепь с пространством состояний $(E,\mathcal{E})$, начальным распределением $\mu = \mathrm{Law}\,(X_0^\mu)$, $\mu\in\mathcal{P}(E)$ и переходными вероятностями $P_{\mu_n}(x,B) = \mathbb{P}_{\mu_n}\left(X_{n+1}^\mu \in B | X_n^\mu = x\right)$, где $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$, $n\in\mathbb{Z}_+$ and $\mu_n := \mathrm{Law}(X_n^\mu)$. Таким образом, переходное ядро зависит не только от состояния процесса в момент n, но и от его распределения в этот момент.

В работе О. А. Бутковского [1] рассмотрены эргодические свойства нелинейных марковских процессов с дискретным временем и был получен следующий результат, устанавливающий условия (1) и (2) равномерной эргодичности, а также существования и единственности инвариантной меры:

$$\sup_{\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)} \|P_\mu(x,\cdot) - P_\nu(y,\cdot)\|_{TV} \le 2(1-\alpha), \quad 0<\alpha<1, \quad x,y\in E, \tag{1}$$

$$\|P_\mu(x,\cdot) - P_\nu(x,\cdot)\|_{TV} \le \lambda\|\mu-\nu\|_{TV}, \quad \lambda\in[0,\alpha], \quad x\in E, \quad \mu,\nu\in\mathcal{P}(E). \tag{2}$$

Тогда, справедливы следующие оценки сходимости переходных ядер к инвариантной мере:

$$\|\mu_n - \pi\|_{TV} \le 2(1-(\alpha-\lambda))^n, \quad \text{если}\, \lambda<\alpha,$$
$$\|\mu_n - \pi\|_{TV} \le 2/\left(\lambda n\right), \quad \text{если}\, \lambda=\alpha.$$

В данной работе было сделано обобщение результата [1] для оценки сходимости за два шага с лучшей скоростью сходимости.

Теорема 1. *Пусть процесс X имеет матрицу переходных вероятностей за два шага $Q_\mu(x,B) := P_\mu(X_2\in B|X_0=x)$ и удовлетворяет следующим условиям (3) и (4):*

$$\sup_{\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)} \|Q_\mu(x,\cdot) - Q_\nu(y,\cdot)\|_{TV} \le 2(1-\alpha_2), \quad 0<\alpha_2<1, \quad x,y\in E, \tag{3}$$

$$\|Q_\mu(x,\cdot) - Q_\nu(x,\cdot)\|_{TV} \le \lambda_2\|\mu-\nu\|_{TV}, \quad \lambda_2\in[0,\alpha_2], \quad x\in E, \quad \mu,\nu\in\mathcal{P}(E). \tag{4}$$

Тогда процесс X имеет единственную инвариантную меру и для любой пары вероятностных мер $\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)$ справедлива сходимость:

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \le \|\mu_0-\nu_0\|_{TV}(1-\alpha_2+\lambda_2)^{[n/2]}, \quad \textit{если}\, \lambda_2<\alpha_2,$$
$$\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \le 2/\left(\lambda_2 n\right), \quad \textit{если}\, \lambda_2=\alpha_2.$$

Также приведен пример процесса, для которого условия результата [1] не выполнены, однако оценка за два шага позволяет установить экспоненциальную сходимость. Таким образом условие $\lambda>\alpha$ не препятствует экспоненциальной сходимости для определенного класса нелинейных марковских цепей.

Источники и литература

1) Бутковский О. А. Об эргодических свойствах нелинейных марковских цепей и стохастических уравнений Маккина–Власова // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58. No. 4. С. 782-794.