Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц[1]

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Макарова Юлия Константиновна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: ykmakarova@gmail.com

Ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) являются удобным инструментом для описания динамики популяций с рождением и гибелью частиц, которым посвящены работы многих авторов, см. например [1], [2], [3], [4]. Мы обобщаем ВСБ на модель, где возможно деление на несколько типов частиц. Насколько нам известно, модели такого типа ранее не рассматривались.

Рассматривается модель симметричного, однородного по пространству и неприводимого ветвящегося случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ с двумя типами частиц. Мы считаем, что размножение и гибель частиц возможны в каждом узле решетке, при этом каждый тип частиц может производить частицы как первого типа, так и второго.

Пусть $N(t,y) = [N_1(t,y), N_2(t,y)]^T$ — вектор, каждая из компонент которого является числом частиц типа $i = 1,2$ в момент времени t в точке $y \in \mathbb{Z}^d$. В начальный момент времени на решетке в каждой точке находится одинаковое фиксированное число частиц обоих типов. Эволюция частиц каждого типа содержит следующие возможности. За малое время dt каждая частица типа $i = 1,2$ может погибнуть с вероятностью $\mu_i dt$, произвести k потомков первого типа и l потомков второго типа $(k+l \geqslant 2)$ с вероятностью $\beta_i(k,l)dt$. Тогда производящая функция числа потомков имеет вид:

$$F_i(z_1, z_2) = \sum_{k+l \geqslant 2} z_1^k z_2^l \beta_i(k,l).$$

Также возможно блуждание по решетке каждого из типов частиц i $(i = 1,2)$. Так, частица типа i может совершить прыжок из точки x в точку $x+z$ с вероятностью $\varkappa_i a_i(z) dt$, где $\sum_{z \neq 0} a_i(z) = 1$, $a_i(0) = -1$, $\varkappa_i > 0$ — коэффициент диффузии. Таким образом, случайное блуждание частиц типа i задается следующим генератором:

$$(\mathcal{L}_i \psi)(x) = \varkappa_i \sum_{z \neq 0} a_i(z)[\psi(x+z) - \psi(x)].$$

Мы предполагаем, что все коэффициенты μ_i, $\beta_i(k,l)$, $k+l \geqslant 2$ являются постоянными, то есть что все источники ветвления одинаковые.

Для изучения предельного поведения распределения частиц каждого типа по решетке требуется изучение предельного поведения моментов этих случайных величин. Уравнения для моментов получаются из производящих функций для субпопуляций числа частиц, которые могут быть представлены в следующем виде

$$n_i(t,x,y) = [n_{i1}(t,x,y), n_{i2}(t,x,y)]^T.$$

Здесь $n_i(t,x,y)$ — вектор частиц в точке y, порожденных одной частицей типа i $(i = 1,2)$, которая в начальный момент времени $t = 0$ была в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Компоненты этих

[1] Работа поддерживается РФФИ, грантом 20-01-00487

векторов $n_{ij}(t,x,y)$ — число частиц в точке y типа j, порожденные одной частицей типа i в точке x в начальный момент времени $t=0$.

Основным результатом работы является получение дифференциальных уравнений для производящих функций числа частиц

$$\Phi_i(t,x,y;z) = z_1^{n_{i1}(t,x,y)} z_2^{n_{i2}(t,x,y)}, \qquad z=(z_1,z_2),$$

моментов случайных величин $n_{ij}(t,x,y)$: $m_{ij}^{(k)}(t,x,y) = n_{ij}^k(t,x,y)$, $k=1,2$, а также исследование их асимптотического поведения при больших временах при некоторых условиях в частном случае, когда частицы одного типа не могут производить потомков.

Дифференциальные уравнения для производящих функций имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_i(t,x,y;z)}{\partial t} &= \mathcal{L}_i\Phi_i(t,x,y;z) + \mu_i(1-\Phi_i(t,x,y;z)) + F_i(\Phi_1,\Phi_2)\\ &-\sum_{k+l\geqslant 2}\beta_i(k,l)\Phi_i(t,x,y;z);\\ \Phi_i(0,x,y;z) &= \begin{cases}1, x\neq y;\\ z_i, x=y.\end{cases}\end{aligned}$$

Для первых моментов в частном случае, когда частицы второго типа не могут производить потомство, получены точные решения уравнений для первых моментов.

Источники и литература

1) Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. Главная редакция физико-математической литературы, издательство Наука. Москва, 1971.
2) Яровая Е.Б.. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. Москва, 2007.
3) Makarova Yu., Han D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration. Lyapunov Stability // Markov Processes and Related Fields. 2019. v. 25(4). p. 683-708
4) Molchanov S., Whitmeyer J. Spatial models of population processes // Modern problems of stochastic analysis and statistics — selected contributions in honor of Valentin Konakov (ed. V. Panov). MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. v. 208. p. 435-454. Springer.