Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Об одной марковской модели эволюции мнений

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Воробьева Маргарита Юрьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: vorobyeva.margarita@yandex.ru

Рассмотрим марковский процесс $\vec{X}(t)$ с дискретным временем, мотивированный задачей обмена мнениями в сообществе из K участников (см. [1,2]). Каждый участник имеет скрытое от других мнение: $X_i(t) = \theta_j \in \Theta$, где Θ некоторое упорядоченное множество из N различных мнений, $\Theta \subset (0,1)$. В каждый момент времени участники выполняют публичное действие, $a_i(t) = \mathbb{I}_{[1/2,1]}(X_i(t))$, и узнают агрегированную информацию о текущих действиях всех участников $Q^+(t) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K a_i(t)$, и $Q^-(t) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K (1-a_i(t))$. Задана некоторая функция $f : \Theta \to [0,1)$. Значение $f(\theta_j)$ суть вероятность того, что мнение $X_i(t) = \theta_j$ сохранится на следующем шаге: $X_i(t+1) = \theta_j$. Иначе, оно меняется на одно из соседних θ_{j+1} или θ_{j-1} с соответствующими вероятностями $(1 - f(\theta_j))Q^+(t)$ и $(1 - f(\theta_j))Q^-(t)$.

По определению в заданном марковском процессе частицы условно независимы, то есть, вероятности перехода за один шаг имеют вид:

$$P(\vec{X}(t+1) = \vec{\theta}^{t+1} | \vec{X}(t) = \vec{\theta}^t) = \prod_{i=1}^K P(X_i(t+1) = \theta_i^{t+1} | \vec{X}(t) = \vec{\theta}^t), \quad \vec{\theta}^t \in \Theta^K$$

Определим "числа заполнения": $\nu_j(t) = \#\{k : X_k(t) = \theta_j\}$. "Укрупненный процесс" $(\vec{\nu}(t),\ t = 0,1,\ldots)$ на множестве состояний $\mathcal{G}_{N,K} = \left\{(n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}_+^N :\ \sum_{j=1}^N n_j = K\right\}$ также является марковским. Цепь $\vec{\nu}(t)$ имеет два поглощающих состояния $(K,0,\ldots,0)$ и $(0,\ldots,0,K)$, все прочие состояния являются несущественными и сообщаются между собой.

Интерес представляют системы с большим числом частиц K. Поэтому естественно перейти к процессу "частот": $\rho_j^{(K)}(t) = \frac{\nu_j(t)}{K}$. Нам удалось строго доказать, что если последовательность начальных конфигураций $\vec{X}(0) \in \Theta^K$ такова, что при $K \to \infty$ существует детерминированный предел $\vec{\rho}^{(K)}(0) \xrightarrow{P} \vec{\rho}_0$, то и в каждый момент времени $\vec{\rho}^{(K)}(t) \xrightarrow{P} \vec{\rho}(t)$, где $(\rho(t),\ t \in \mathbb{Z}_+^N)$ — некоторая детерминированная динамическая система на множестве $\mathcal{G}_N = \left\{(y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}_+^N :\ \sum_{j=1}^N y_j = 1\right\}$. Получен вид нелинейного эволюционного уравнения, которому удовлетворяет $\rho(t)$. Исследован вопрос о количестве стационарных решений этого уравнения и обсуждается их связь с поведением исходной стохастической модели.

Источники и литература

1) Lorenz J. Continuous opinion dynamics: Insights through interactive Markov chains. Proceedings of IASTED Conference "Modelling, Simulation and Optimization", 8 p. 2005.
2) Varma V., Morărescu I. and Hayel Y. Analysis and control of multi-leveled opinions spreading in social networks. 2018 Annual American Control Conference (ACC) 2018.