Секция «Геометрия и топология»

Топологическая классификация геодезических биллиардов в трёхмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Белозеров Глеб Владимирович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Теории математического биллиарда, т. е. задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой с абсолютно упругим отражением на границе, посвящено много работ. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещёва [1], а также в книге С. Л. Табачникова [2] дан обзор современных и классических исследований.

Данный доклад будет посвящен интегрируемым геодезическим биллиардам в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим семейство софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$, заданное уравнением:

$$x^2(b-\lambda)(c-\lambda)+y^2(a-\lambda)(c-\lambda)+z^2(a-\lambda)(b-\lambda)=(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

Где $a>b>c>0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр. Биллиардным столом будем называть компактное подмножество в $\mathbb{R}^3$ с непустой внутренностью, граница которого состоит из конечного числа софокусных квадрик, при этом двугранные углы излома на границе равны $\dfrac{\pi}{2}$.

Автором рассмотрена следующая динамическая система: материальная точка движется по прямой внутри биллиардного стола с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Поскольку все углы излома выпуклые, то отражение в точках склейки двух квадрик можно продолжить по непрерывности. Оказалось, что данная система является интегрируемой в кусочно-гладком смысле. Первый интеграл системы H – модуль вектора скорости. Существование еще двух дополнительных первых интегралов, функционально независимых с H, гарантирует знаменитая теорема Якоби-Шаля.

Теорема [Якоби-Шаль] Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n – мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.

На множестве билардных столов было введено отношение эквивалентности. Мы полагаем, что два стола эквивалентны тогда и только тогда, когда один из другого можно получить путём элементарных преобразований(о них будет сказано на докладе). Автором была доказана теорема классификации этих областей. Ключевую роль в доказательстве этой теоремы сыграла сетка эллиптических координат. Также на докладе будет рассказано о грубой лиувиллевой эквиваленности биллиардов внутри биллиардных столов.

Список литературы

[1] *В. В. Козлов, Д. В. Трещёв*, Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991

[2] *С. Табачников*, Геометрия и биллиарды, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2011, 180 с.; пер. с англ.: S. Tabachnikov, Geometry and billiards, Stud. Math. Libr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.