Секция «Геометрия и топология»

Проблема Штейнера в пространствах с евклидовой метрикой Громова-Хаусдорфа

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Малышева Ольга Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: osm95@mail.ru

Пусть M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через G группу движений в $\mathcal{R}^n$, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathcal{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается движением $O \in G$. Обозначим через $\mathcal{H}_o(\mathcal{R}^n)$ пространство таких классов эквивалентности.

Определение 1. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Определение 2. *Расстоянием в евклидовой метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B) = \inf_O\Big\{\mathrm{d}_H(A, OB)\Big\},$$

где O — движение пространства, сохраняющее ориентацию.

Определение 3. Движение O, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Пусть M — конечное множество, а $G = (V,E), V \subset X$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M, если $M \subset V$. M называется *границей* всех графов, соединяющих M. *Точкой Ферма* для трехточечной границы A_1, A_2, A_3 называется такая точка S, что $\sum_{i=1}^{3} d(A_i, S)$ минимально.

Определение 4. Граф G, соединяющий X, минимально возможной длины $d(G)$, является деревом, которое называется *минимальным деревом Штейнера на* X.

Замечание 1. Минимальное дерево Штейнера существует не всегда. Например, если рассмотреть евклидову плоскость без одной точки, то в полученном метрическом пространстве не существует минимального дерева Штейнера, соединяющего вершины правильного треугольника, центром которого является выколотая точка.

Определение 5. *Точками Штейнера* называются внутренние вершины минимального дерева Штейнера.

Пусть $\mathcal{M} = (M, d)$ — конечное псевдометрическое пространство, $G = (V, E)$ — граф, соединяющий M, и $\omega\, E \to \mathcal{R}_+$ — некоторое отображение, называемое *весовой функцией* и порождающее взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, \omega)$. Функция ω порождает псевдометрику d_ω на V: *Расстоянием между вершинами* $\mathcal{G}$ называется минимальный вес путей, соединяющих эти вершины. Взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением пространства* $\mathcal{M}$, если для любых точек p, $q \in M$ имеем $d(p,q) \leq d_\omega(p,q)$. *Минимальным заполнением* называется заполнение $\mathcal{G}_0$ такое, что $\omega(\mathcal{G}_0) = \inf_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G})$.

Пространство всех компактных подмножеств $\mathcal{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа является ограниченно компактным.

Пусть $Z(x, r_x)$ обозначает окрестность радиуса $r_x \geq 0$ отрезка длины $x \geq 0$. Будем обозначать через $\mathcal{X}$ подмножество в $\mathcal{H}_o(\mathcal{R}^n)$, составленное из классов эквивалентности всех окрестностей всех отрезков в $\mathcal{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть* $A = Z(a, r_A), B = Z(b, r_B)$. *Тогда*

$$d_{EGH}(A, B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\tfrac{b}{2} - \tfrac{a}{2} + r_B - r_A|\right\}.$$

Теорема 2. *Для границы* $\mathcal{M} := \left\{[A_1], ..., [A_n]\right\} \subset \mathcal{X}$ *существуют* $[S_1], ..., [S_m]$ $\in \mathcal{X}$*, реализующие минимальное заполнение данной границы. В частности,* $[S_1], ..., [S_m]$ *являются ее точками Штейнера.*

Теорема 3. *Для трехточечных границ* $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$*, где* $X_1 = Z(x_1, r_1)$, $X_2 = Z(x_2, r_2), X_3 = Z(x_3, r_3)$ *таких, что* $d_{EGH}(X_i, X_j) = |\frac{x_i}{2} - \frac{x_j}{2} + r_i - r_j|$*, точка Ферма в смысле евклидова расстояния по Громову–Хаусдорфу является точкой Ферма в смысле расстояния по Громову–Хаусдорфу.*

Источники и литература

1) Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
2) Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces* // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008. IEEE Computer Society Conference on. June 2008. 1–8.
3) Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. *Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств* //Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 152–161.
4) Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116