Секция «Геометрия и топология»

О некоторых свойствах типа нормальности

Научный руководитель – Комбаров Анатолий Петрович

Богомолов Алексей Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, Москва, Россия
E-mail: a.v.bogomolov94@yandex.ru

Топологическое пространство (X, τ) называется *равномерно нормальным*, если система $\mathcal{U}$ всех окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$ образует равномерность на X. При этом $\mathcal{U}$ индуцирует исходную топологию τ. Окрестность диагонали — любое симметричное множество, внутренность которого содержит Δ. Равномерная нормальность является усилением свойства нормальности.

Корсон [3] доказал, что Σ-произведение полных сепарабельных метрических пространств равномерно нормально. Комбаровым [1] было доказано, что Σ-произведение полных по Чеху линделефовых пространств счетной тесноты равномерно нормально. Более общей является

Теорема 1. *Σ-произведение перистых линделефовых пространств счетной тесноты равномерно нормально.*

Топологическое пространство называется *паранормальным* [5], если для любой счётной дискретной системы замкнутых множеств $\{D_n : n < \omega\}$ найдется локально конечная система открытых множеств $\{U_n : n < \omega\}$ такая, что для всех $n < \omega$ выполняется $D_n \subset U_n$ и $D_m \cap U_n \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $D_n = D_m$. Все нормальные и все счетно паракомпактные пространства являются паранормальными.

Следующая теорема аналогична классической теореме Даукера.

Теорема 2. *Пространство X счетно паракомпактно в том и только в том случае, когда произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I паранормально.*

Следующие теоремы характеризуют счетную паракомпактность в классе секвенциальных пространств и в классе пространств счетной тесноты.

Теорема 3. *Секвенциальное пространство X счетно паракомпактно в том и только в том случае, когда произведение $X \times Y$ пространства X на любое счетно компактное пространство Y паранормально.*

Теорема 4. *Счетной тесноты пространство X счетно паракомпактно в том и только в том случае, когда произведение $X \times Y$ пространства X на любое ω-ограниченное пространство Y паранормально.*

Хорошо известна теорема Стоуна [6] о том, что несчетное произведение экземпляров натурального ряда N не является нормальным пространством. Нагами [4] доказал, что несчетное произведение экземпляров натурального ряда не счетно паракомпактно. Одновременным обобщением является

Теорема 5. *Несчетное произведение экземпляров натурального ряда N не является паранормальным пространством.*

Источники и литература

1) Комбаров А. П. О произведении нормальных пространств. Равномерности на Σ-произведениях // Докл. АН СССР. 1972. т. 205 № 5. с. 1033–1035.

2) Комбаров А. П. Об одной теореме А. Стоуна // Докл. АН СССР. 1983. № 270. с. 38–40.
3) Corson H. H. Normality in subsets of product spaces // Amer. J. Math. 1959. v. 81 № 3. c. 785–796.
4) Nagami K. Countable paracompactness of inverse limits and products // Fund. Math. 1972. № 73. p. 261–270.
5) Nyikos P. Problem Section: Problem B // Top. Proc. 1984. № 9. p. 367–367.
6) Stone A. H. Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. № 54. p. 977–982.